АЛГЕБРА

КЛАСС

9

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$b_n = b_1 q^{n-1}$

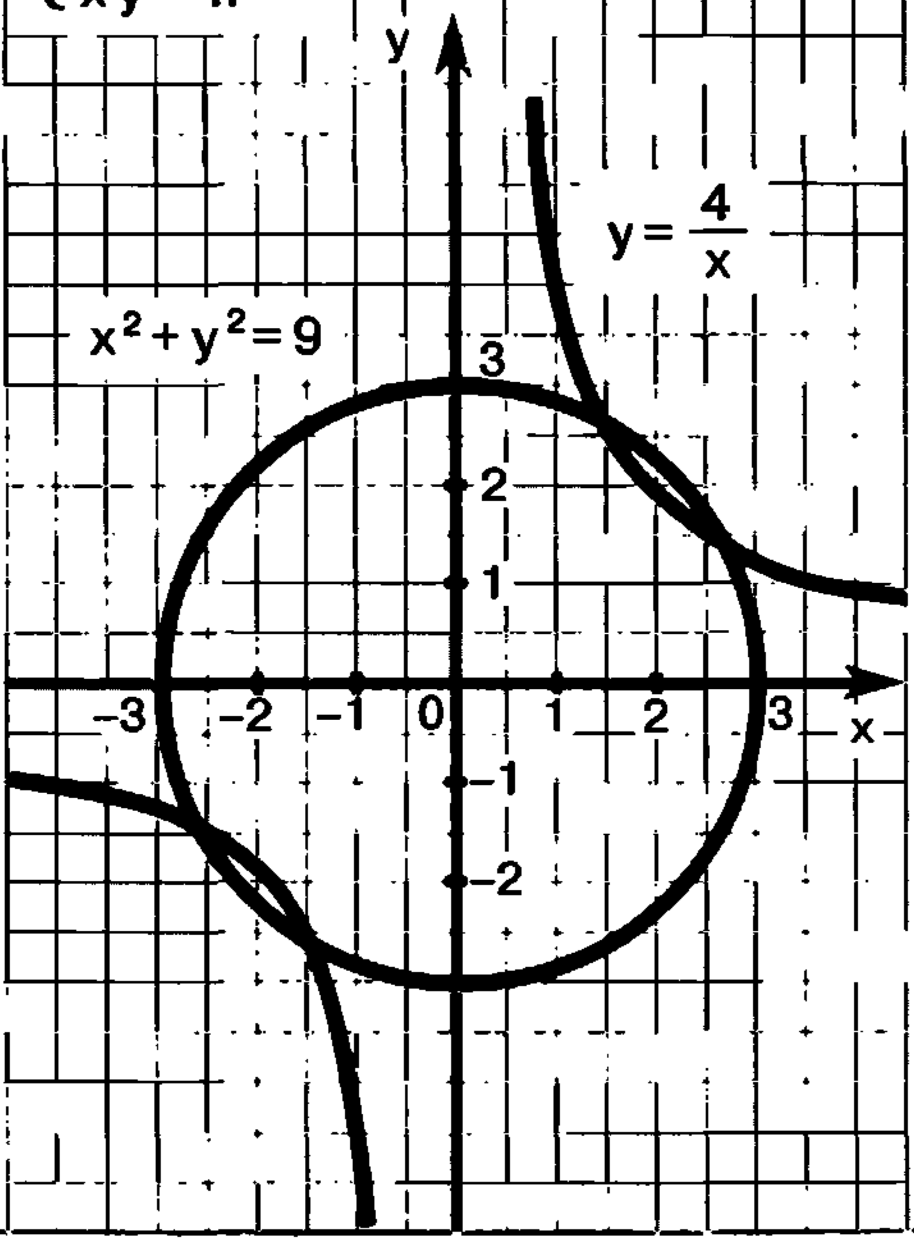
$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ xy=4. \end{cases}$$



$x_1 \approx 1{,}5;$ $x_2 \approx 2{,}6;$ $x_3 \approx -1{,}5;$ $x_4 \approx -2{,}6;$

$y_1 \approx 2{,}6;$ $y_2 \approx 1{,}5;$ $y_3 \approx -2{,}6;$ $y_4 \approx -1{,}5;$

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 10 ДО 99

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

АЛГЕБРА

9 КЛАСС

УЧЕБНИК ДЛЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Под редакцией С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

16-е издание

Глава I
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Глава II
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава III
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Глава IV
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Глава V
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Москва
«Просвещение»
2009

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№10106-5215/15 от 31.10.07)
и Российской академии образования (№01-200/5/7д от 11.10.07)

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Условные обозначения

- текст, который нужно запомнить
- материал, который важно знать
- ▶ начало решения задачи
- ◁ окончание решения задачи
- начало обоснования утверждения или вывода формулы
- ○ окончание обоснования или вывода
- 11. задание обязательного уровня
- 19. задание повышенной трудности
- упражнения для повторения

Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений /
А45 [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. — 16-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 271 с. : ил. — ISBN 978-5-09-021134-5.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-021134-5

Глава I КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Функция. Область определения и область значений функции

Функция — одно из важнейших математических понятий. Напомним, что

> функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*. Переменную y называют *зависимой переменной*. Говорят также, что *переменная y является функцией от переменной x*. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*.

Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то коротко это записывают так: $y = f(x)$ (читают: «y равно f от x»). Символом $f(x)$ обозначают также значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x.

Пусть, например, функция задана формулой $y = 2x^2 - 6$. Тогда можно записать, что $f(x) = 2x^2 - 6$. Найдем значения функции f для значений x, равных 2,5 и −3:

$$f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5^2 - 6 = 6{,}5; \quad f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 - 6 = 12.$$

Заметим, что в записи вида $y = f(x)$ вместо f употребляют и другие буквы: g, φ и т. п.

Все значения независимой переменной образуют *область определения функции*. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *область значений функции*.

Функция $y = f(x)$ считается заданной, если указана область определения функции и правило, согласно которому каждому значению независимой переменной поставлено в соответствие единственное значение зависимой переменной.

Если функция $y = f(x)$ задана формулой и ее область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл. Например, областью определения функции $f(x) = 5x + x^2$ является множество всех чисел; областью определения функции $g(x) = \frac{2}{x+3}$ служит множество всех чисел, кроме -3.

Область определения функции, описывающей реальный процесс, зависит от конкретных условий его протекания. Например, зависимость длины l железного стержня от температуры нагревания t выражается формулой $l = l_0(1 + \alpha t)$, где l_0 — начальная длина стержня, а α — коэффициент линейного расширения. Указанная формула имеет смысл при любых значениях t. Однако областью определения функции $l = f(t)$ является промежуток в несколько десятков градусов, для которого справедлив закон линейного расширения.

Напомним, что *графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.*

На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок $[-3; 7]$. С помощью графика можно найти, например, что $f(-3) = -2$, $f(0) = 2{,}5$, $f(2) = 4$, $f(5) = 2$. Наименьшее значение функции равно -2, а наибольшее равно 4, при этом любое число от -2 до 4 является значением данной функции. Таким образом, областью значений функции $y = f(x)$ служит отрезок $[-2; 4]$.

Мы ранее изучали некоторые важные виды функций: линейную функцию, т. е. функцию, задаваемую формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа; прямую пропорциональность — частный случай линейной функции, она задается формулой $y = kx$, где $k \neq 0$; обратную пропорциональность — функцию $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

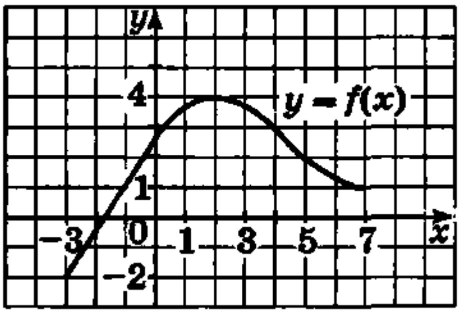


Рис. 1

Графиком функции $y = kx + b$ служит прямая (рис. 2). Областью определения этой функции является множество всех чисел. Область значений этой функции при $k \neq 0$ есть множество всех чисел, а при $k = 0$ ее область значений состоит из одного числа b.

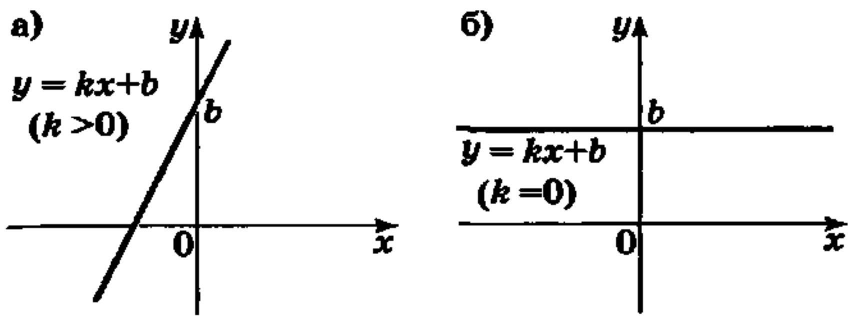


Рис. 2

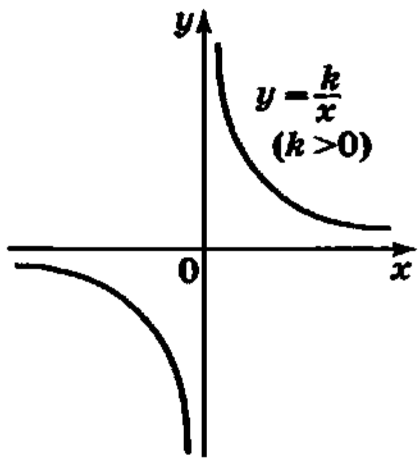


Рис. 3

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется гиперболой. На рисунке 3 изображен график функции $y = \frac{k}{x}$ для $k > 0$. Область определения этой функции есть множество всех чисел, кроме нуля. Это же множество является и областью ее значений.

Функциями такого вида описываются многие реальные процессы и закономерности. Например, прямой пропорциональностью является зависимость массы тела m от его объема V при постоянной плотности ρ ($m = \rho V$), зависимость длины окружности C от ее радиуса R ($C = 2\pi R$). Обратной пропорциональностью является зависимость силы тока I на участке цепи от сопротивления проводника R при постоянном напряжении U $\left(I = \frac{U}{R}\right)$, зависимость времени t, которое затрачивает равномерно движущееся тело на прохождение заданного пути s, от скорости движения v $\left(t = \frac{s}{v}\right)$.

Мы изучали также функции, заданные формулами $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. Их графики изображены на рисунке 4.

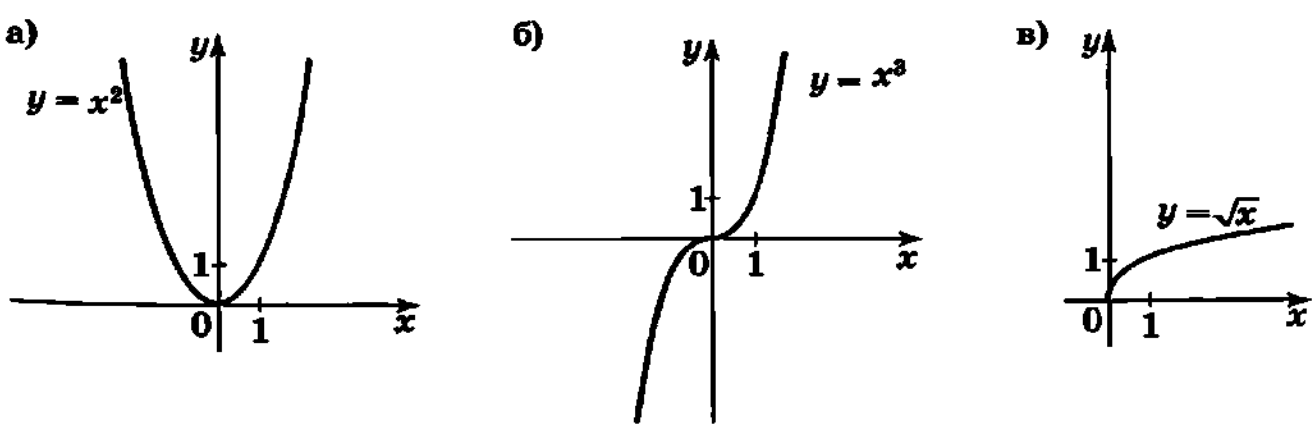


Рис. 4

Рассмотрим еще одну функцию, а именно функцию, заданную формулой $y = |x|$.

Так как выражение $|x|$ имеет смысл при любом x, то областью определения этой функции является множество всех чисел. По определению $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Поэтому функцию $y = |x|$ можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

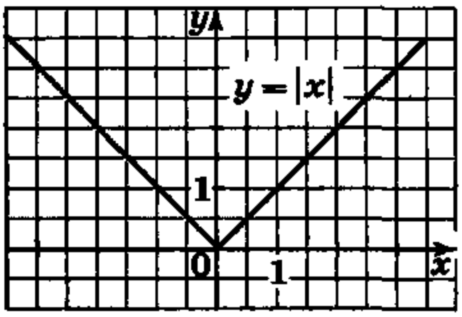


Рис. 5

График рассматриваемой функции в промежутке $[0; +\infty)$ совпадает с графиком функции $y = x$, а в промежутке $(-\infty; 0)$ — с графиком функции $y = -x$. График функции $y = |x|$ изображен на рисунке 5. Он состоит из двух лучей, исходящих из начала координат и являющихся биссектрисами I и II координатных углов.

Упражнения

1. Функция задана формулой $f(x) = -3x^2 + 10$. Найдите:
а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

2. Найдите $f(0)$, $f(1{,}5)$ и $f(-1)$, если $f(x) = \frac{x - 0{,}5}{x + 0{,}5}$.

3. Известно, что $f(x) = x^3 - 10$. Найдите:
а) $f(5)$; б) $f(4)$; в) $f(2)$; г) $f(-3)$.

4. Пусть $\varphi(x) = x^2 + x + 1$. Найдите $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3)$.

5. Известно, что $f(x) = -5x + 6$. Найдите значение x, при котором:
а) $f(x) = 17$; б) $f(x) = -3$; в) $f(x) = 0$.

6. Найдите значения x, при которых $g(x) = 0$, если:
а) $g(x) = x(x + 4)$; б) $g(x) = \frac{x+1}{5-x}$.

7. Существует ли значение x, при котором значение функции, заданной формулой $\varphi(x) = \frac{4}{6+x}$, равно: а) 1; б) $-0{,}5$; в) 0? В случае утвердительного ответа укажите это значение.

8. Найдите значение x, при котором функция, заданная формулой $f(x) = 0{,}5x - 4$, принимает значение, равное: а) -5; б) 0; в) 2,5.

9. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 4x - 8$;   в) $y = \frac{2x}{5 - x}$;   д) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$;

б) $y = x^2 - 5x + 1$;   г) $y = \frac{3}{(x - 4)(x + 1)}$;   е) $y = \sqrt{x - 5}$.

10. Приведите пример функции, областью определения которой является:

а) множество всех чисел;
б) множество всех чисел, кроме 7.

11. Какова область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + 2x$;   б) $y = \frac{x - 1}{1 + x}$;   в) $y = \sqrt{9 + x}$?

12. Пассажир метро, вставший на эскалатор, сошел с него через t с. Глубина спуска h м. Угол наклона эскалатора к горизонтальной плоскости 30°. Выразите формулой зависимость h от t, если скорость движения эскалатора равна 0,75 м/с. Найдите:

а) h, если $t = 2{,}25$ мин;
б) t, если $h = 60$ м.

13. Дальность полета s (м) снаряда (без учета сопротивления воздуха), выпущенного из орудия под углом 45° к горизонту, зависит только от начальной скорости снаряда v_0 (м/с) и может быть найдена по формуле $s = \frac{v_0^2}{g}$ ($g \approx 10$ м/с²). Найдите:

а) s, если $v_0 = 600$ м/с;
б) v_0, если $s = 24$ км.

14. Укажите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + \sqrt{|x| - 1}$;

б) $y = \sqrt{|2 - x| - 3x}$.

15. На рисунке 6 изображен график функции $y = g(x)$, областью определения которой служит отрезок $[-6; 5]$. С помощью графика найдите:

а) $g(-4)$, $g(-1)$, $g(1)$, $g(5)$;
б) значения x, при которых $g(x) = 4$, $g(x) = -4$, $g(x) = 0$;
в) наибольшее и наименьшее значения функции;
г) область значений функции.

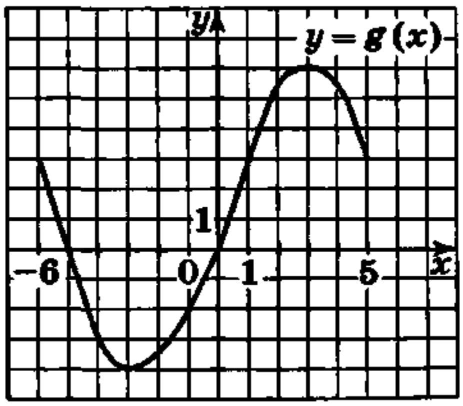


Рис. 6

16. В течение первых 10 дней марта ученики 9 класса измеряли атмосферное давление в полдень. По результатам измерений был построен график (рис. 7). Пользуясь графиком, найдите:

а) каким было атмосферное давление 5 марта, 9 марта;
б) день, когда атмосферное давление было наибольшим.

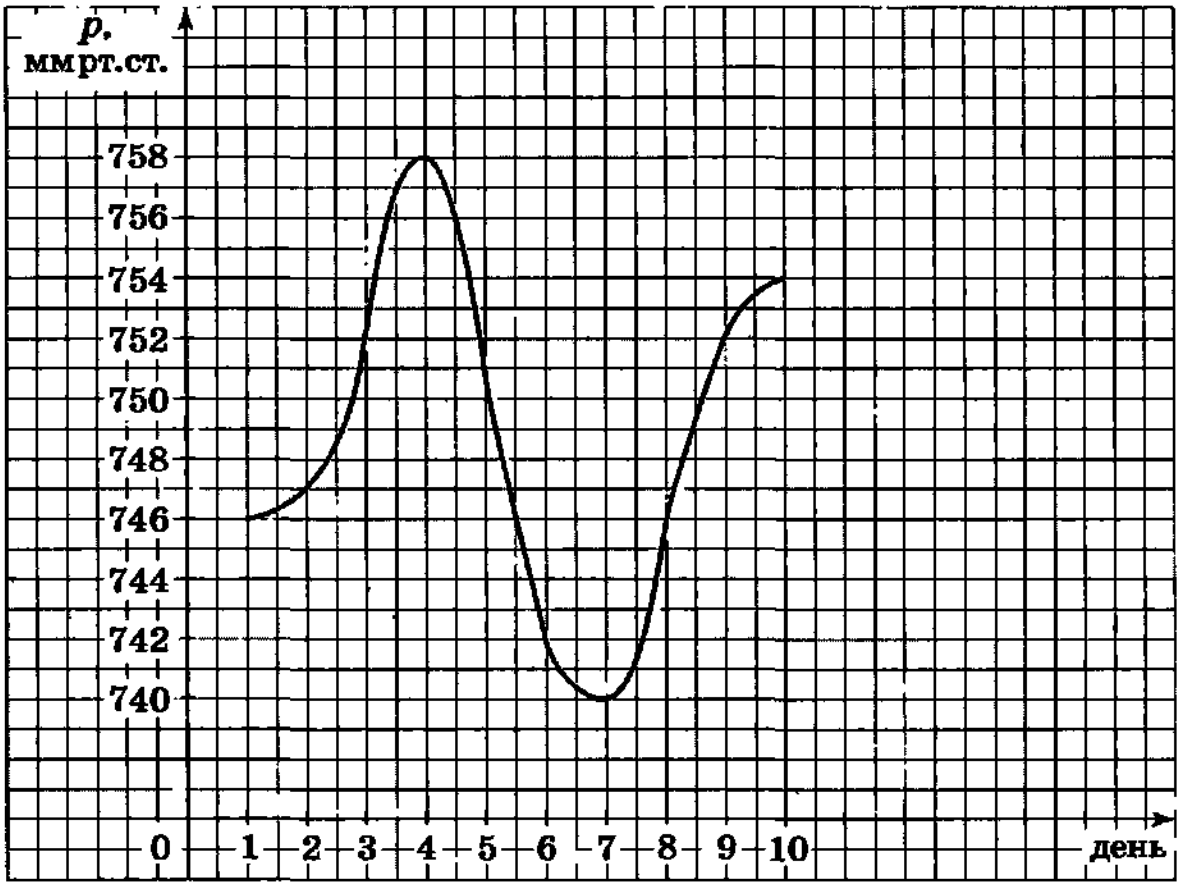


Рис. 7

17. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $f(x) = 1{,}5 - 3x$; в) $f(x) = \frac{10}{x}$;

б) $f(x) = 4{,}5x$; г) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Укажите область определения и область значений функции.

18. Найдите область значений функции:
а) $f(x) = 2x - 1$, где $1 \leqslant x \leqslant 4$;
б) $g(x) = -3x + 8$, где $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

19. Укажите область определения и область значений каждой из функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 4).

20. Найдите область определения и область значений функции $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

21. Периметр равнобедренного треугольника с основанием 20 см зависит от длины x (см) боковой стороны. Задайте формулой функцию, выражающую эту зависимость, зная, что периметр треугольника не превосходит 100 см. Укажите область определения и область значений этой функции.

22. На рисунке 8 изображен график одной из функций, заданных формулами $y = x - 1$, $y = 1 + x$, $y = 2x - 1$, $y = 1 - 2x$. Выясните, какой именно.

23. На рисунке 9 изображены графики функций, заданных формулами $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 2 - \frac{x}{2}$, $y = -\frac{2}{x}$. Для каждой функции укажите соответствующий график.

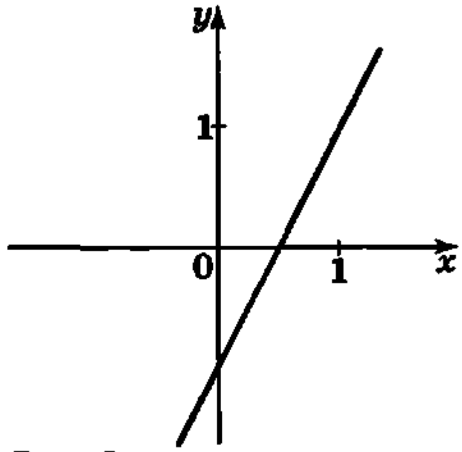


Рис. 8

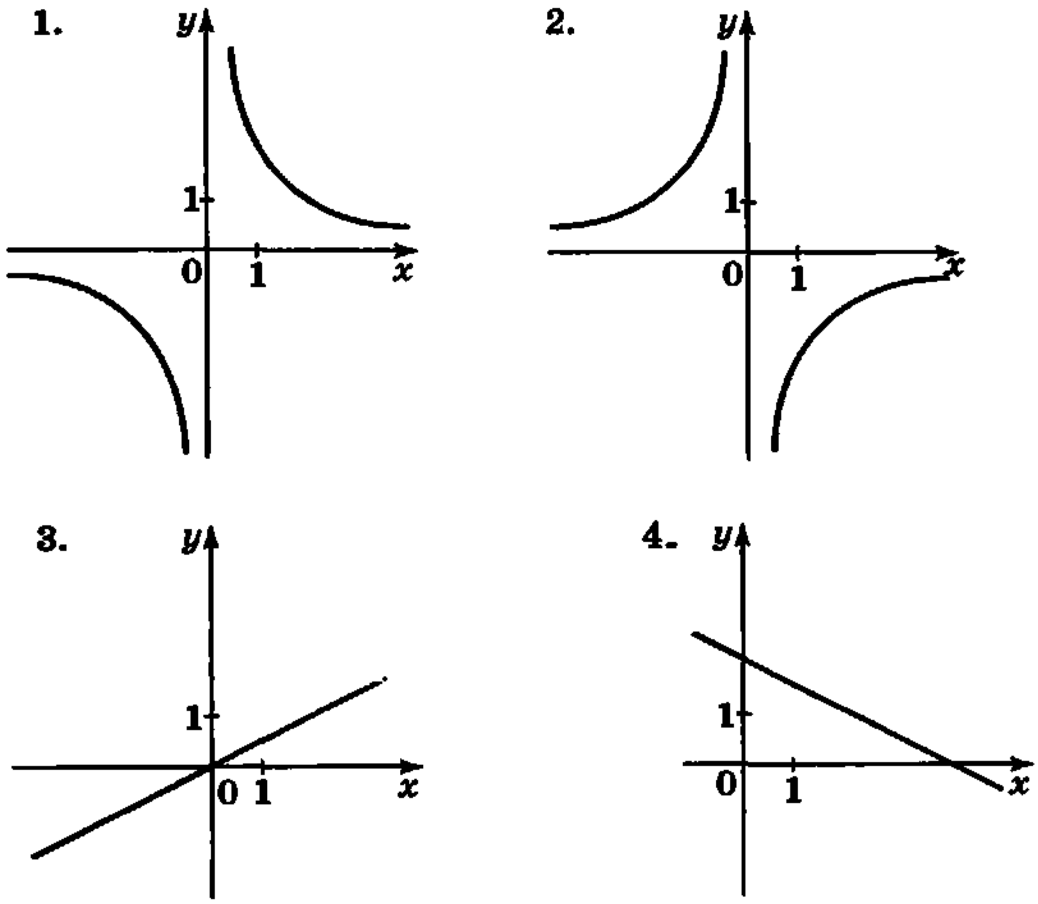


Рис. 9

24. По графику функции $y=|x|$ (см. рис. 5) найдите, при каких значениях x:

а) $|x| = 3{,}5$; б) $|x| < 2$; в) $|x| > 4$.

Каково наименьшее значение функции? Имеет ли она наибольшее значение? Какова область значений функции?

25. Составьте таблицу значений и постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = x^3 - 8x$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$; б) $y = \frac{4}{x+2}$, где $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 6$.

Какова область значений функции?

26. На рисунке 10 изображен график изменения уровня воды в реке относительно нулевой отметки. Опишите, как происходило изменение уровня воды.

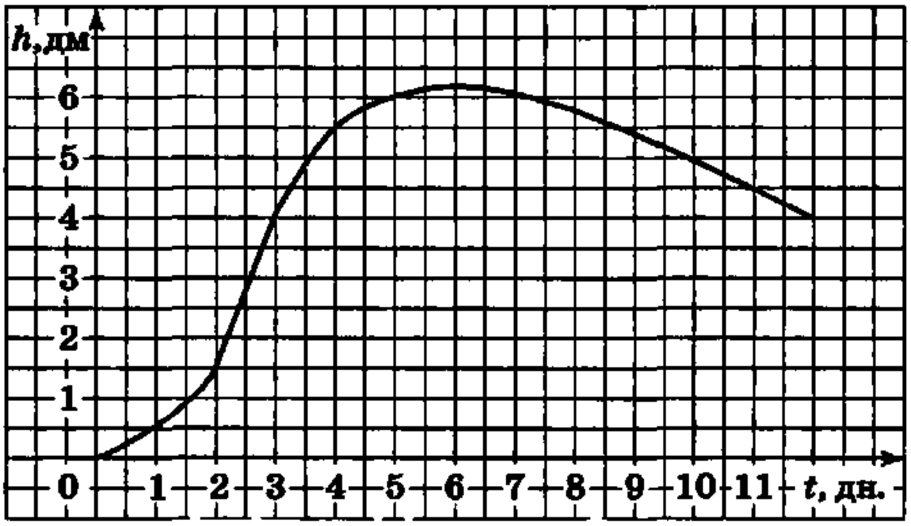


Рис. 10

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ (1792–1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии, которая изменила представление о роли аксиоматики в математике и сыграла важную роль в разработке теории относительности. Большой вклад внес также в математический анализ и алгебру. Он разработал метод приближенного решения алгебраических уравнений высших степеней.

27. Изменение температуры воды p (°C) в баке как функции времени t (мин) описано с помощью формул:

$$p = \begin{cases} 2t + 20, \text{ если } 0 \leqslant t < 40, \\ 100, \text{ если } 40 \leqslant t \leqslant 60, \\ -\frac{2}{3}t + 140, \text{ если } 60 < t \leqslant 150. \end{cases}$$

Найдите $p(20)$; $p(40)$; $p(50)$; $p(60)$; $p(90)$. Постройте график функции $p = f(t)$. Какой физический смысл имеет рассматриваемый процесс в каждом из промежутков $[0; 40)$, $[40; 60]$, $(60; 150]$?

28. Зависимость расстояния s (км), которое велосипедист проехал от базы, от времени его движения t (ч) задана следующим образом:

$$s = \begin{cases} 15t, \text{ если } 0 \leqslant t < \frac{7}{6}, \\ 17{,}5, \text{ если } \frac{7}{6} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}, \\ -12t + 35{,}5, \text{ если } \frac{3}{2} < t \leqslant \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Найдите $s(0)$; $s(1)$; $s(1{,}4)$; $s(2)$. Постройте график функции $s = f(t)$ (масштаб по оси t: 1 ед. — 6 клеточек; по оси s: 10 ед. — 4 клеточки). Опишите, как происходило движение велосипедиста.

П

29. Решите уравнение:

а) $-0{,}5(3x - 4) + 15x = 4(1{,}5x + 1) + 3$;
б) $(2x - 3)(2x + 3) - x^2 = 12x - 69 + 3x^2$.

30. Решите неполное квадратное уравнение:

а) $6x^2 - 3x = 0$; в) $x^2 - 36 = 0$; д) $0{,}5x^2 - 1 = 0$;
б) $x^2 + 9x = 0$; г) $5x^2 + 1 = 0$; е) $0{,}6x + 9x^2 = 0$.

31. Решите квадратное уравнение:

а) $x^2 + 7x + 12 = 0$; в) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
б) $x^2 - 2x - 35 = 0$; г) $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

ПЕТЕР ДИРИХЛЕ (1805–1859) — немецкий математик. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел. Имеет значительные достижения в развитии алгебры, теории функций и аналитической геометрии. Им проведены важные исследования в области механики и математической физики.

2. Свойства функций

На рисунке 11 изображен график зависимости температуры воздуха P (°С) от времени суток t (ч). Мы видим, что в 2 ч и в 8 ч температура равнялась нулю, от 0 до 2 ч и от 8 до 24 ч она была выше нуля, а от 2 до 8 ч — ниже нуля. Из графика ясно также, что в течение первых пяти часов температура понижалась, затем в промежутке от 5 до 14 ч она повышалась, а потом опять понижалась.

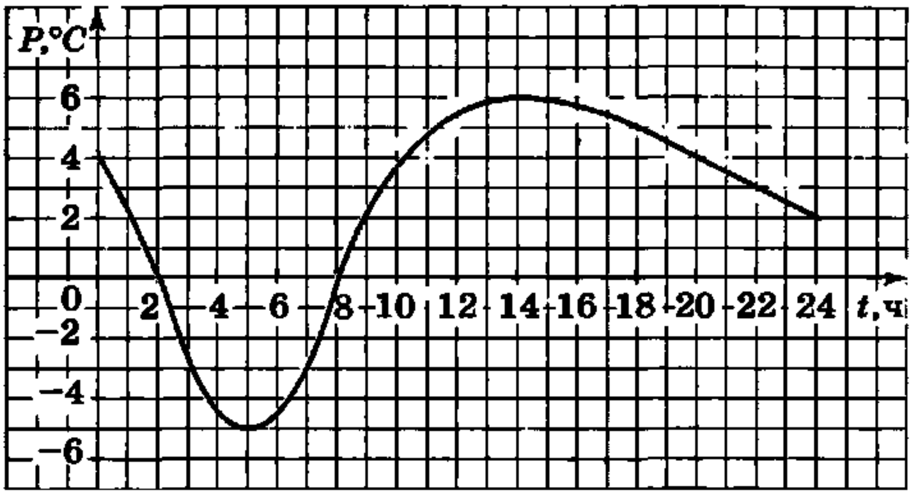


Рис. 11

С помощью графика мы выяснили некоторые свойства функции $P = f(t)$, где t — время суток в часах, а P — температура воздуха в градусах Цельсия.

Рассмотрим теперь свойства функции $y = f(x)$, где $-5 \leqslant x \leqslant 9$, график которой изображен на рисунке 12. Выясним сначала, при каких значениях x функция обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения.

Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью x. Получим $x = -3$ и $x = 7$. Значит, функция принимает значение, равное нулю, при $x = -3$ и $x = 7$. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называют *нулями функции*, т. е. числа −3 и 7 — нули рассматриваемой функции. Нули функции разбивают ее область определения — промежуток $[-5; 9]$ на три промежутка: $[-5; -3)$, $(-3; 7)$ и $(7; 9]$. Для значений x из промежутка $(-3; 7)$ точки графика расположены выше оси x, а для значений x из промежутков $[-5; -3)$ и $(7; 9]$ — ниже оси x. Значит, в промежутке $(-3; 7)$ функция принимает положительные

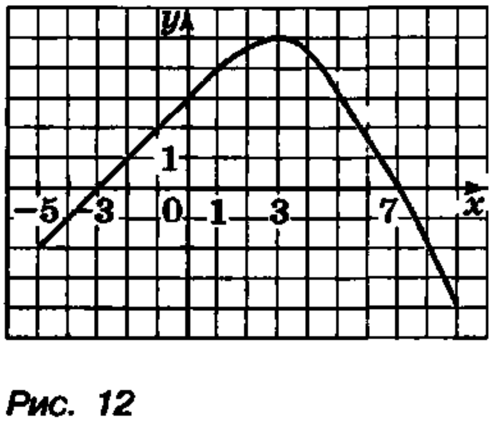


Рис. 12

значения, а в каждом из промежутков [−5; −3) и (7; 9] — отрицательные.

Промежутки, в которых функция сохраняет знак, называют *промежутками знакопостоянства.*

Выясним теперь, как изменяются (увеличиваются или уменьшаются) значения данной функции с изменением x от −5 до 9.

Из графика видно, что с возрастанием x от −5 до 3 значения y увеличиваются, а с возрастанием x от 3 до 9 значения y уменьшаются. Говорят, что в промежутке [−5; 3] функция $y = f(x)$ является *возрастающей*, а в промежутке [3; 9] эта функция является *убывающей*.

Определение. Функция называется возрастающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции; функция называется убывающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Иными словами, функцию $y = f(x)$ называют возрастающей в некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$; функцию $y = f(x)$ называют убывающей в некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют *возрастающей функцией*, а если убывает, то *убывающей функцией*.

На рисунке 13 изображены графики возрастающей функции и убывающей функции.

Выясним, какими свойствами обладают некоторые изученные ранее функции.

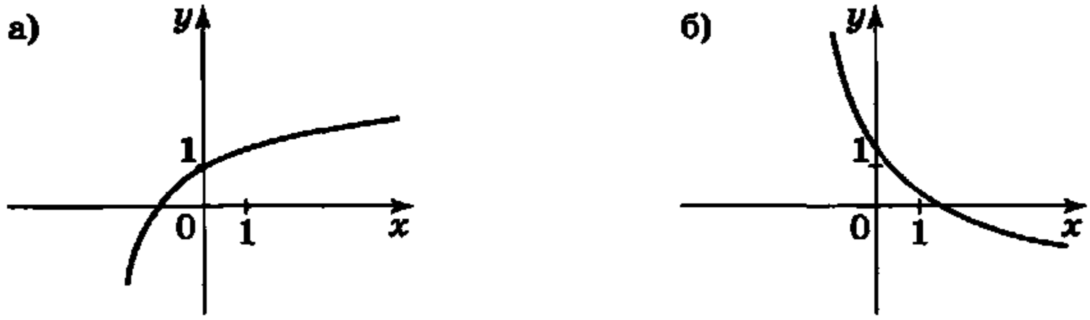
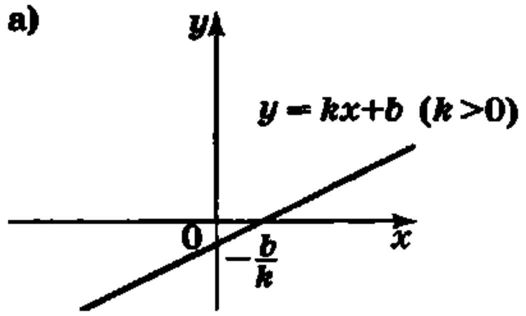


Рис. 13

Пример 1. Рассмотрим свойства функции $y = kx + b$, где $k \neq 0$ (рис. 14).



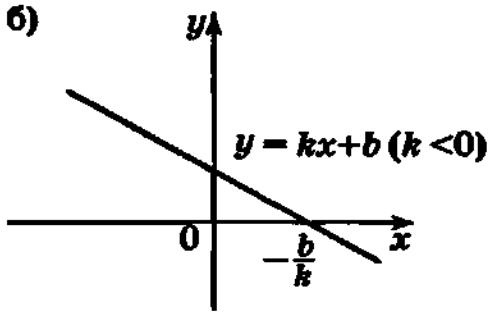


Рис. 14

1. *Функция обращается в нуль при* $x = -\frac{b}{k}$.

   Действительно, решив уравнение $kx + b = 0$, найдем, что $y = 0$ при $x = -\frac{b}{k}$.

2. *При* $k > 0$ *функция принимает отрицательные значения в промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ *и положительные значения в промежутке* $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$.

   Решив неравенства $kx + b < 0$ и $kx + b > 0$, найдем, что если $k > 0$, то $y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ и $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$.

   При $k < 0$ *функция принимает отрицательные значения в промежутке* $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ *и положительные значения в промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$.

   Убедиться в этом можно, решив неравенства $kx + b < 0$ и $kx + b > 0$ при условии, что $k < 0$.

3. *При* $k > 0$ *функция* $y = kx + b$ *является возрастающей, а при* $k < 0$ *— убывающей.*

   Докажем это. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем $x_2 > x_1$. Обозначим через y_1 и y_2 соответствующие им значения функции:

   $$y_1 = kx_1 + b \text{ и } y_2 = kx_2 + b.$$

   Рассмотрим разность $y_2 - y_1$:

   $$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

   Множитель $x_2 - x_1$ положителен, так как $x_2 > x_1$. Поэтому знак произведения $k(x_2 - x_1)$ определяется знаком коэффициента k.

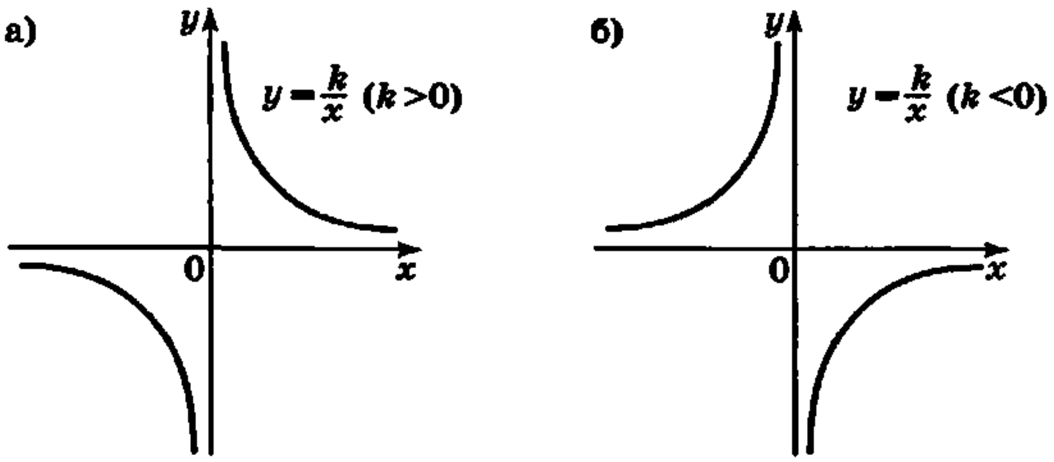


Рис. 15

Если $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$ и $y_2 > y_1$. Значит, при $k > 0$ функция $y = kx + b$ является возрастающей.
Если $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$ и $y_2 < y_1$. Значит, при $k < 0$ функция $y = kx + b$ является убывающей.

Пример 2. Рассмотрим свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ (рис. 15).

1. *Функция нулей не имеет.*

   Это следует из того, что дробь $\frac{k}{x}$ при любом значении аргумента не обращается в нуль (по условию $k \neq 0$).

2. *Функция* $y = \frac{k}{x}$ *при* $k > 0$ *принимает отрицательные значения в промежутке* $(-\infty; 0)$ *и положительные значения в промежутке* $(0; +\infty)$.

   Действительно, если $k > 0$, то дробь $\frac{k}{x} < 0$ при $x < 0$ и $\frac{k}{x} > 0$ при $x > 0$.

   Функция $y = \frac{k}{x}$ *при* $k < 0$ *принимает отрицательные значения в промежутке* $(0; +\infty)$ *и положительные значения в промежутке* $(-\infty; 0)$.
   Обоснование аналогично изложенному для случая $k > 0$.

3. *При* $k > 0$ *функция* $y = \frac{k}{x}$ *является убывающей в каждом из промежутков* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$, *а при* $k < 0$ *— возрастающей в каждом из этих промежутков* (см. рис. 15, *а*, *б*).
   Доказательство этого свойства проводится аналогично тому, как это было сделано для линейной функции.

   Заметим, что, хотя функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, убывает (или возрастает) в каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, она не является убывающей (возрастающей) функцией на всей области определения.

Упражнения

32. На рисунке 16 изображен график изменения скорости велосипедиста v в зависимости от времени его движения t. Укажите промежуток времени, в течение которого скорость велосипедиста: а) возрастала; б) убывала; в) оставалась постоянной.

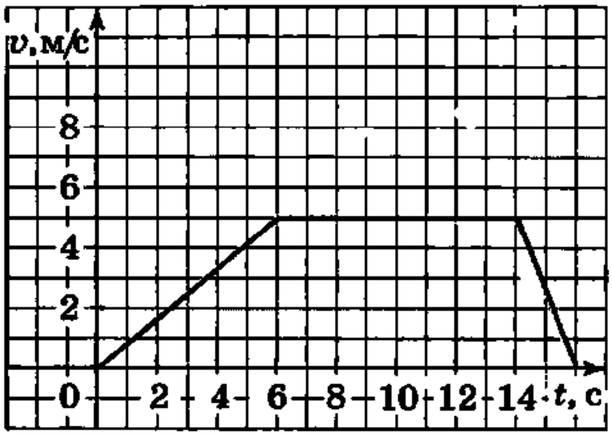


Рис. 16

33. На рисунке 17 изображен график температуры воды в сосуде. Опишите, как изменялась температура, и укажите промежуток времени, в течение которого проводилось наблюдение. Каково было наибольшее значение температуры?

34. Некоторый кусок льда, имеющий температуру −5 °С, нагревали на газовой горелке. Результат нагревания в течение 16 мин показан на графике (рис. 18). Какой физический смысл имеет рассматриваемый процесс в каждом из промежутков [0; 4], (4; 10), [10; 16]?

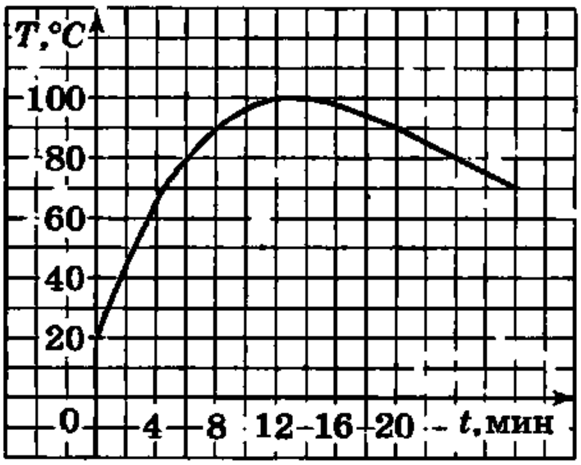


Рис. 17

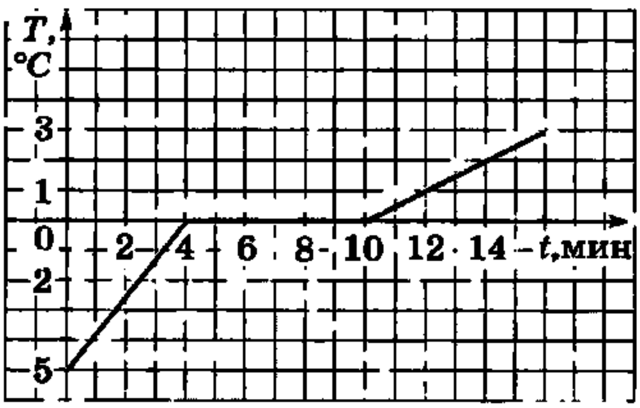


Рис. 18

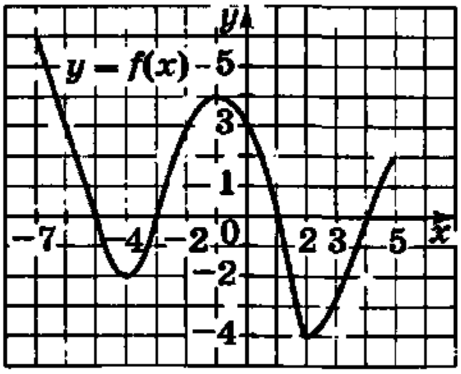


Рис. 19

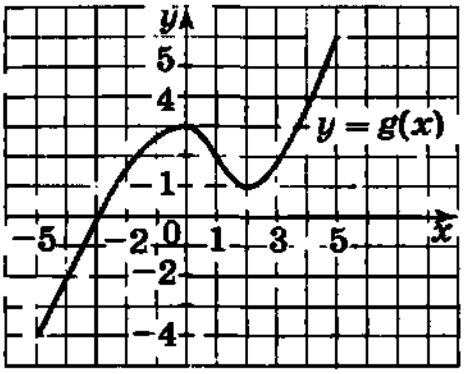


Рис. 20

35. На рисунке 19 изображен график функции $y = f(x)$, где $-7 \leqslant x \leqslant 5$. Укажите:

а) нули функции;

б) промежутки, в которых функция принимает значения одного и того же знака (положительные или отрицательные);

в) промежутки, в которых функция возрастает, и промежутки, в которых она убывает.

36. Перечислите свойства функции $y = g(x)$, график которой изображен на рисунке 20.

37. На рисунке 21 изображен график функции $y = g(x)$, где $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Сколько нулей имеет функция? Укажите: а) промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения; б) промежутки, в которых функция убывает.

38. Начертите график какой-либо функции с областью определения $[-3; 4]$ так, чтобы эта функция:

а) возрастала в промежутке $[-3; 0]$ и убывала в промежутке $[0; 4]$;

б) убывала в промежутке $[-3; 1]$ и возрастала в промежутке $[1; 4]$.

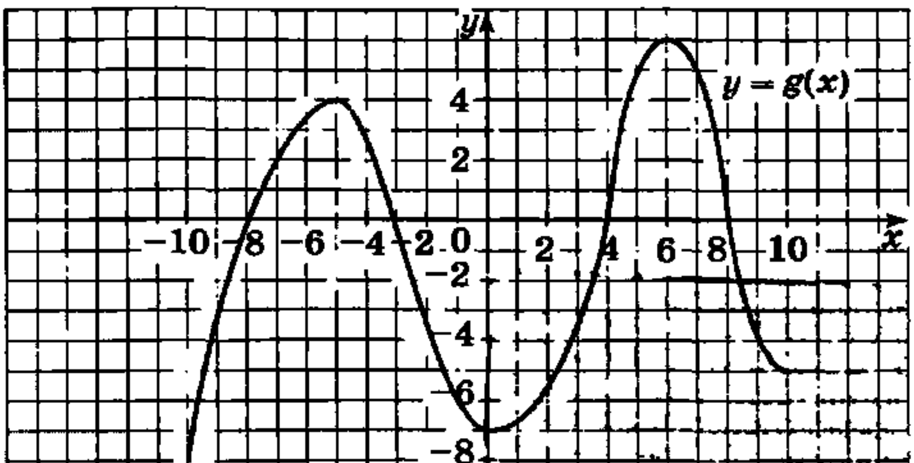


Рис. 21

39. Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой служат числа: а) -3 и 3; б) -4, 0 и 2; в) -3, 2, 1 и 5.

40. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = -0{,}8x + 12$; в) $y = \dfrac{4 + 2x}{x^2 + 5}$;

б) $y = (3x - 10)(x + 6)$; г) $y = \dfrac{6}{(x-1)(x+8)}$.

41. Имеет ли нули функция:

а) $y = 2{,}1x - 70$; б) $y = 4x(x - 2)$; в) $y = \dfrac{6 - x}{x}$?

42. Укажите область определения и найдите нули функции:

а) $y = \dfrac{x - \sqrt{x+6}}{x+5}$; б) $y = \dfrac{4x^2 + 25x}{2x - \sqrt{10 - 6x}}$.

43. При каких значениях x функция $y = f(x)$ обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения, если:

а) $f(x) = -0{,}7x + 350$; б) $f(x) = 30x + 10$?

Начертите схематически график функции и проиллюстрируйте на нем установленные свойства.

44. Какие из линейных функций $y = 8x - 5$, $y = -3x + 11$, $y = -49x - 100$, $y = x + 1$, $y = 1 - x$ являются: а) возрастающими; б) убывающими?

45. При каких значениях a функция $y = (a - 2)x + 3$:

а) является возрастающей;
б) является убывающей;
в) не является ни возрастающей, ни убывающей?

46. Постройте график функции и перечислите ее свойства:

а) $y = 1{,}5x - 3$; б) $y = -0{,}6x + 5$.

47. Постройте график функции: а) $y = 1{,}6x$; б) $y = -0{,}4x$. Перечислите свойства функции $y = kx$ при $k > 0$ и при $k < 0$.

48. Функция задана формулой $f(x) = 13x - 78$. При каких значениях x: а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$? Является ли функция возрастающей или убывающей?

49. Используя рисунки 4 и 5, перечислите свойства функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ и $y = |x|$.

50. Постройте график функции и перечислите ее свойства:

а) $y = \dfrac{3}{x}$; б) $y = -\dfrac{4}{x}$.

51. Является ли возрастающей или убывающей функция:

а) $y = 5x + \sqrt{x}$; б) $y = -x + \sqrt{-x}$; в) $y = x^2 + \sqrt{x}$?

ение:

$= 0$; в) $2x^2 + 17x = 0$;

г) $0{,}5x^2 + 9 = 0$.

и $g(-2)$, если:

$-$; б) $g(x) = \frac{x}{x^2+5}$; в) $g(x) = \frac{-x}{x^2+5}$.

множители многочлен:

б) $a^4 - 169a^2$; в) $c^3 - 8c^2 + 16c$.

осы

функции. Что называется областью определения значений функции?

рафиком функции? Что представляет собой функции? прямой пропорциональности? обратности?

к 19, поясните, как с помощью графика функции и промежутки, в которых функция со- инимает положительные значения; отрицатель-

ение функции, возрастающей в промежутке; ромежутке. Назовите промежутки возрастания и кции, график которой изображен на рисунке 19.

примеры возрастающей и убывающей линейной ормулируйте и докажите соответствующее свойство функции.

яется в каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ $= \frac{k}{x}$? Рассмотрите случаи $k > 0$ и $k < 0$.

[redacted]ТРЕХЧЛЕН

атный трехчлен и его корни

выражений $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x + 2$, $2y^4 - y^3 + 5y^2 -$ $- 6z^4 + z^2 - 2z + 3$ является многочленом с одной пе-

Значение переменной, при котором многочлен обращается в нуль, называют *корнем многочлена.*

Найдем, например, корни многочлена $x^3 - x$. Для этого решим уравнение $x^3 - x = 0$. Разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$x(x - 1)(x + 1) = 0,$$

отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Таким образом, числа 0, 1, −1 — корни многочлена $x^3 - x$.

Многочлен второй степени с одной переменной называют квадратным трехчленом.

Определение. Квадратным трехчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Коэффициент a называют старшим коэффициентом, а c — свободным членом квадратного трехчлена.

Примерами квадратных трехчленов являются многочлены $3x^2 - 2x - 5$, $x^2 + 7x - 8$. В первом из них $a = 3$, $b = -2$, $c = -5$, во втором $a = 1$, $b = 7$, $c = -8$. К квадратным трехчленам относятся также и такие многочлены второй степени, у которых один из коэффициентов b либо c или даже оба равны нулю. Так, многочлен $7x^2 - x$ считают квадратным трехчленом. У него $a = 7$, $b = -1$, $c = 0$.

Для того чтобы найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 1. Найдем корни квадратного трехчлена $3x^2 - 2x - 5$.

▶ Решим уравнение

$$3x^2 - 2x - 5 = 0.$$

Имеем

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 64;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6};$$

$$x_1 = 1\frac{2}{3},\ x_2 = -1.$$

Значит, квадратный трехчлен $3x^2 - 2x - 5$ имеет два корня: $1\frac{2}{3}$ и −1. ◁

Так как квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет те же корни, что и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то он может, как и квадратное уравнение, иметь два корня, один корень или не иметь корней. Это зависит от значения дискриминанта квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$, который называют также *дискриминантом квадратного трехчлена*. Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня; если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень; если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет корней.

При решении задач иногда бывает удобно представить квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x - m)^2 + n$, где m и n — некоторые числа. Такое преобразование называется *выделением квадрата двучлена* из квадратного трехчлена. Покажем на примере, как выполняется это преобразование.

Пример 2. Выделим из трехчлена $3x^2 - 36x + 140$ квадрат двучлена.

▶ Вынесем за скобки множитель 3:

$$3x^2 - 36x + 140 = 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right).$$

Преобразуем выражение в скобках. Для этого представим $12x$ в виде произведения $2 \cdot 6 \cdot x$, а затем прибавим и вычтем 6^2. Получим

$$3x^2 - 36x + 140 = 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right) =$$
$$= 3\left(x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 - 6^2 + \frac{140}{3}\right) =$$
$$= 3\left((x - 6)^2 + \frac{32}{3}\right) = 3(x - 6)^2 + 32.$$

Значит, $3x^2 - 36x + 140 = 3(x - 6)^2 + 32$. ◁

Рассмотрим задачу, при решении которой применяется выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена.

Пример 3. Докажем, что из всех прямоугольников с периметром 20 см наибольшую площадь имеет квадрат.

▶ Пусть одна сторона прямоугольника равна x см. Тогда другая сторона равна $10 - x$ см, а площадь прямоугольника равна $x(10 - x)$ см^2.

Раскрыв скобки в выражении $x(10 - x)$, получим $10x - x^2$. Выражение $-x^2 + 10x$ представляет собой квадратный трехчлен, в котором $a = -1$, $b = 10$, $c = 0$. Выделим квадрат двучлена:

$$-x^2 + 10x = -(x^2 - 10x) =$$
$$= -(x^2 - 10x + 25 - 25) = -(x - 5)^2 + 25.$$

Так как выражение $-(x - 5)^2$ при любом $x \neq 5$ отрицательно, то сумма $-(x - 5)^2 + 25$ принимает наибольшее значение при $x = 5$.

Значит, площадь будет наибольшей, когда одна из сторон прямоугольника равна 5 см. В этом случае другая сторона также равна 5 см, т. е. прямоугольник является квадратом. ◁

Упражнения

55. Какие из чисел −2, −1, 0, 2, 3 являются корнями многочлена $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$?

56. Найдите корни многочлена:
а) $x^2 - 7x$; б) $2x - 5$; в) $y^3 - 4y$; г) $y^4 - 16$.

57. Имеет ли корни многочлен:
а) $x^2 + 1$; б) $x^3 - 27$; в) $-2y^6 - 1$; г) $y^4 + 3y^2 + 7$?

58. Какие из чисел 1, 2, $3 - \sqrt{2}$, $-7 + \sqrt{2}$ являются корнями квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 7$?

59. Найдите корни квадратного трехчлена:
а) $x^2 + x - 6$; г) $-2x^2 - x - 0{,}125$;
б) $9x^2 - 9x + 2$; д) $0{,}1x^2 + 0{,}4$;
в) $0{,}2x^2 + 3x - 20$; е) $-0{,}3x^2 + 1{,}5x$.

60. Найдите корни квадратного трехчлена:
а) $10x^2 + 5x - 5$; в) $x^2 - 2x - 4$;
б) $-2x^2 + 12x - 18$; г) $12x^2 - 12$.

61. Имеет ли квадратный трехчлен корни и если имеет, то сколько:
а) $5x^2 - 8x + 3$; в) $-7x^2 + 6x - 2$;
б) $9x^2 + 6x + 1$; г) $-x^2 + 5x - 3$?

62. Имеет ли квадратный трехчлен корни и если имеет, то сколько:
а) $-4x^2 - 4x + 3$; в) $9x^2 - 12x + 4$;
б) $4x^2 - 4x + 3$; г) $9x^2 - 12x - 4$?

63. Сумма коэффициентов квадратного трехчлена равна нулю, а его свободный член в 4 раза больше старшего коэффициента. Найдите корни этого трехчлена.

64. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:
а) $x^2 - 6x - 2$; в) $2x^2 - 4x + 10$;
б) $x^2 + 5x + 20$; г) $\frac{1}{2}x^2 + x - 6$.

65. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:
а) $x^2 - 10x + 10$; в) $3x^2 + 6x - 3$;
б) $x^2 + 3x - 1$; г) $\frac{1}{4}x^2 - x + 2$.

66. Докажите, что при любом значении x квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 6x + 10$ принимает положительное значение;

б) $5x^2 - 10x + 5$ принимает неотрицательное значение;

в) $-x^2 + 20x - 100$ принимает неположительное значение;

г) $-2x^2 + 16x - 33$ принимает отрицательное значение.

67. Даны квадратные трехчлены $x^2 - 6x + 11$ и $-x^2 + 6x - 11$. Докажите, что первый из них не принимает отрицательных значений, а второй — положительных.

68. При каком значении x трехчлен $2x^2 - 4x + 6$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

69. Дан квадратный трехчлен $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$. Выясните, при каком значении x он принимает наименьшее значение и чему равно это значение трехчлена.

70. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с суммой катетов, равной 6 см, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

71. С башни выпустили вверх стрелу из лука. Если начальная скорость стрелы равна 50 м/с, высота башни 20 м и t (с) — время полета стрелы, то расстояние h (м) стрелы от поверхности земли в момент времени t (с) можно найти по формуле $h = -5t^2 + 50t + 20$ (приближенное значение ускорения свободного падения считается равным 10 м/с^2). Какой наибольшей высоты достигнет стрела?

П

72. Функция задана формулой $f(x) = \frac{0{,}5x - 1}{6}$. При каких значениях x:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$?

73. Длина l стального рельса, имеющего при 0 °С длину 60 м, изменяется в зависимости от температуры t (°С) по закону $l = 60(1 + 0{,}000012t)$. Найдите приращение длины l рельса при изменении температуры:

а) от 0 до 25 °С; б) от 25 до 50 °С.

74. Решите уравнение:

а) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$; б) $31x + 77 = 15(x + 1)^2$.

75. Разложите на множители многочлен:

а) $ab + 3b - 5a - 15$; б) $2xy - y + 8x - 4$.

4. Разложение квадратного трехчлена на множители

Пусть требуется разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 21x + 30$. Вынесем сначала за скобки старший коэффициент 3. Получим

$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x^2 - 7x + 10).$$

Для того чтобы разложить на множители трехчлен $x^2 - 7x + 10$, представим $-7x$ в виде суммы одночленов $-2x$ и $-5x$ и применим способ группировки:

$$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 =$$
$$= x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5).$$

Значит,

$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x - 2)(x - 5).$$

При $x = 2$ и $x = 5$ произведение $3(x - 2)(x - 5)$, а следовательно, и трехчлен $3x^2 - 21x + 30$ обращаются в нуль. Значит, числа 2 и 5 являются его корнями.

Итак, мы представили квадратный трехчлен $3x^2 - 21x + 30$ в виде произведения числа 3, т. е. старшего коэффициента, и двух линейных множителей. Первый из них представляет собой разность между переменной x и одним корнем трехчлена, а второй — разность между переменной x и другим корнем.

Такое разложение можно получить для любого квадратного трехчлена, имеющего корни. При этом считают, что если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то этот трехчлен имеет два равных корня.

ТЕОРЕМА

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

● Вынесем за скобки в многочлене $ax^2 + bx + c$ множитель a. Получим

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Так как корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Отсюда

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Поэтому

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 =$$
$$= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2).$$

Итак,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \ \bigcirc$$

Покажем, что

> если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.

● Пусть квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. Предположим, что его можно представить в виде произведения многочленов первой степени:

$$ax^2 + bx + c = (kx + m)(px + q),$$

где k, m, p и q — некоторые числа, причем $k \neq 0$ и $p \neq 0$. Произведение $(kx + m)(px + q)$ обращается в нуль при $x = -\frac{m}{k}$ и $x = -\frac{q}{p}$. Следовательно, при этих значениях x обращается в нуль и трехчлен $ax^2 + bx + c$, т. е. числа $-\frac{m}{k}$ и $-\frac{q}{p}$ являются его корнями. Мы пришли к противоречию, так как по условию этот трехчлен корней не имеет. ○

Пример 1. Разложим на множители квадратный трехчлен

$$2x^2 + 7x - 4.$$

▶ Решив уравнение $2x^2 + 7x - 4 = 0$, найдем корни трехчлена:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = -4.$$

По теореме о разложении квадратного трехчлена на множители имеем

$$2x^2 + 7x - 4 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4).$$

Полученный результат можно записать иначе, умножив число 2 на двучлен $x - \frac{1}{2}$. Получим

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4). \ \triangleleft$$

Пример 2. Разложим на множители квадратный трехчлен

$$-4x^2 + 24x - 36.$$

▶ Решив уравнение $-4x^2 + 24x - 36 = 0$, найдем корни трехчлена: $x_1 = x_2 = 3$.

Значит,

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - 3)(x - 3),$$

или иначе

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - 3)^2. \triangleleft$$

Пример 3. Сократим дробь $\frac{3x + 2}{3x^2 - 13x - 10}$.

▶ Разложим на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 13x - 10$. Его корни равны $-\frac{2}{3}$ и 5. Поэтому

$$3x^2 - 13x - 10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 5) = (3x + 2)(x - 5).$$

Значит,

$$\frac{3x + 2}{3x^2 - 13x - 10} = \frac{3x + 2}{(3x + 2)(x - 5)} = \frac{1}{x - 5}. \triangleleft$$

Упражнения

76. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $3x^2 - 24x + 21$; г) $x^2 - 12x + 20$; ж) $2x^2 - 5x + 3$;
б) $5x^2 + 10x - 15$; д) $-y^2 + 16y - 15$; з) $5y^2 + 2y - 3$;
в) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$; е) $-x^2 - 8x + 9$; и) $-2x^2 + 5x + 7$.

77. Разложите на множители трехчлен:

а) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$; в) $16a^2 + 24a + 9$;
б) $-9x^2 + 12x - 4$; г) $0{,}25m^2 - 2m + 4$.

78. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $2x^2 + 12x - 14$; в) $3x^2 + 5x - 2$;
б) $-m^2 + 5m - 6$; г) $6x^2 - 13x + 6$.

79. Докажите тождество:

а) $10x^2 + 19x - 2 = 10(x - 0{,}1)(x + 2)$;
б) $0{,}5(x - 6)(x - 5) = 0{,}5x^2 - 5{,}5x + 15$.

80. Можно ли представить квадратный трехчлен в виде произведения многочленов первой степени:

а) $-3y^2 + 3y + 11$; в) $x^2 - 7x + 11$;
б) $4b^2 - 9b + 7$; г) $3y^2 - 12y + 12$?

81. Можно ли разложить на множители квадратный трехчлен, коэффициенты которого — равные, отличные от нуля числа?

82. Покажите, что существует квадратный трехчлен, имеющий корни, коэффициенты которого — натуральные числа вида n, $2n$, $3n$ (расположенные в произвольном порядке). Разложите этот трехчлен на множители.

83. Сократите дробь:

а) $\dfrac{4x+4}{3x^2+2x-1}$; в) $\dfrac{16-b^2}{b^2-b-12}$; д) $\dfrac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$;

б) $\dfrac{2a^2-5a-3}{3a-9}$; г) $\dfrac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$; е) $\dfrac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$.

84. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-64}$; б) $\dfrac{2y^2+9y-5}{4y^2-1}$.

85. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{36-x^2}{6-7x+x^2}$ при $x=-9;\ -99;\ -999$;

б) $\dfrac{4x^2+8x-32}{4x^2-16}$ при $x=-1;\ 5;\ 10$.

86. Чем различаются графики функций $y=x-4$ и $y=\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}$?

П

87. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2-1}{2}-11x=11$; б) $\dfrac{x^2+x}{2}=\dfrac{8x-7}{3}$.

88. Разложите на множители многочлен:

а) $4x^2-6x+2xy-3y$; б) $4a^3+2b^3-2a^2b-4ab^2$.

89. В какой координатной четверти расположена точка пересечения графиков функций $f(x)=0{,}8x+2{,}1$ и $g(x)=-0{,}9x+3$?

Контрольные вопросы

1. Дайте определение квадратного трехчлена. Сколько корней может иметь квадратный трехчлен?
2. Покажите на примере выражения $3x^2-12x+32$, как можно выделить квадрат двучлена из квадратного трехчлена.
3. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на множители квадратного трехчлена, имеющего корни.

§ 3. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

5. Функция $y = ax^2$, ее график и свойства

Одной из важных функций, к изучению которой мы переходим, является квадратичная функция.

Определение. Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Областью определения квадратичной функции является множество всех чисел.

Примером квадратичной функции является зависимость пути от времени при равноускоренном движении. Если тело движется с ускорением a (м/с^2) и к началу отсчета времени t прошло путь s_0 (м), имея в этот момент скорость v_0 (м/с), то зависимость пройденного пути s (м) от времени t (с) выражается формулой

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0t + s_0.$$

Если, например, $a = 6$, $v_0 = 5$, $s_0 = 20$, то

$$s = 3t^2 + 5t + 20.$$

Изучение квадратичной функции начнем с частного случая — функции $y = ax^2$.

При $a = 1$ формула $y = ax^2$ принимает вид $y = x^2$. С этой функцией вы уже встречались. Ее графиком является парабола.

Построим график функции $y = 2x^2$. Составим таблицу значений этой функции:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Построим точки, координаты которых указаны в таблице. Соединив их плавной линией, получим график функции $y = 2x^2$ (рис. 22, a).

При любом $x \neq 0$ значение функции $y = 2x^2$ больше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вверх так, чтобы расстояние от

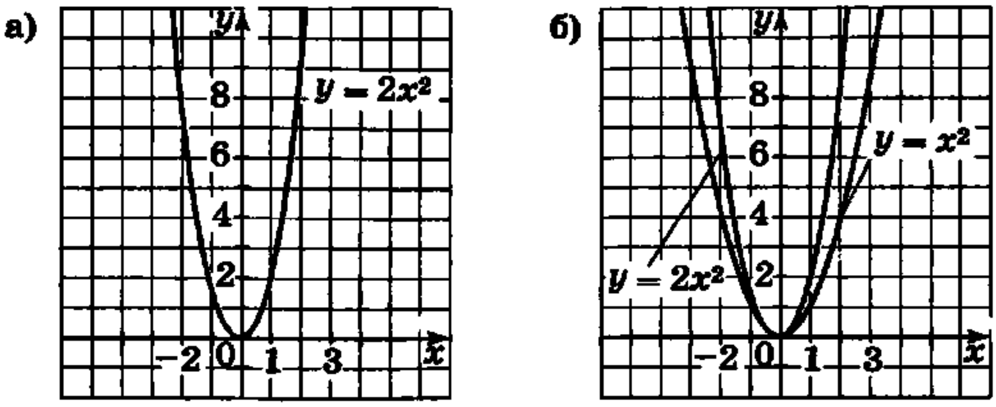


Рис. 22

этой точки до оси x увеличилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции $y = 2x^2$. При этом каждая точка графика функции $y = 2x^2$ может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$. Иными словами, график функции $y = 2x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в 2 раза (рис. 22, *б*).

Построим теперь график функции $y = \frac{1}{2}x^2$. Для этого составим таблицу ее значений:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 23, *а*).

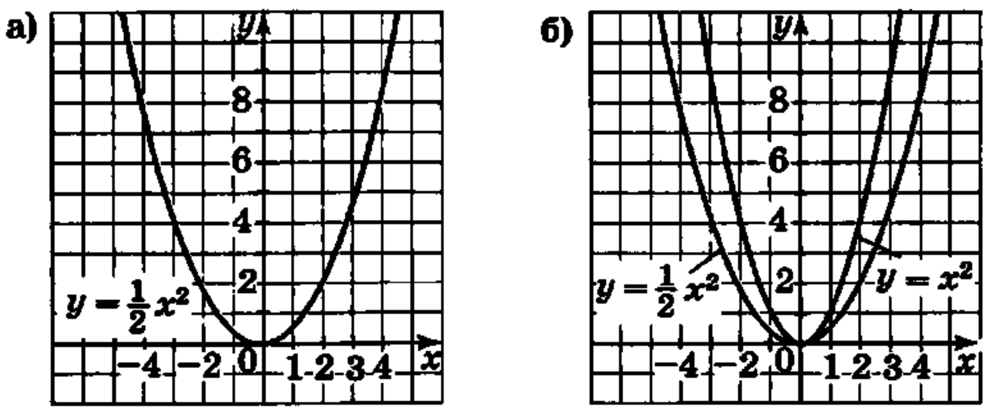


Рис. 23

При любом $x \neq 0$ значение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ меньше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вниз так, чтобы расстояние от этой точки до оси x уменьшилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$, причем каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$ (рис. 23, *б*). Таким образом, график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ сжатием к оси x в 2 раза.

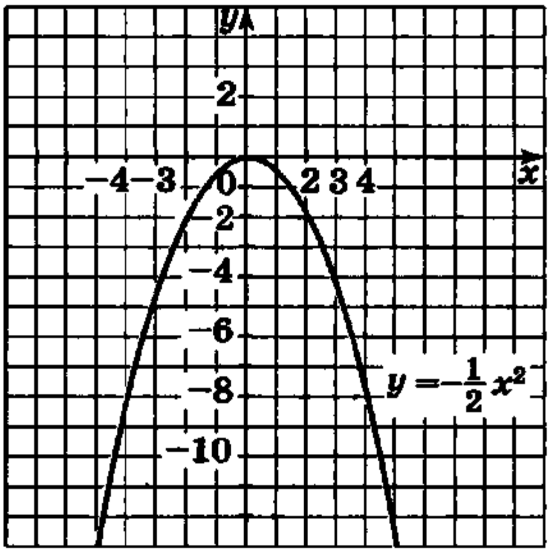
Вообще график функции $y = ax^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в a раз, если $a > 1$, и сжатием к оси x в $\frac{1}{a}$ раза, если $0 < a < 1$.

Рассмотрим теперь функцию $y = ax^2$ при $a < 0$.

Построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$, для чего составим таблицу значений этой функции:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−8	−4,5	−2	−0,5	0	−0,5	−2	−4,5	−8

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ (рис. 24, *а*).

а)


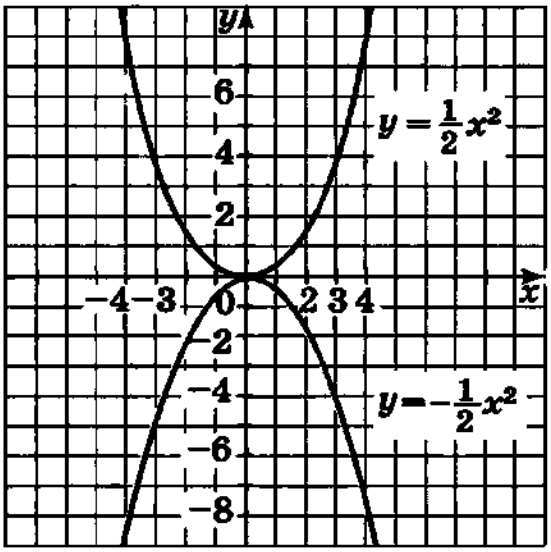
б)


Рис. 24

Сравним графики функций $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 24, *б*). При любом x значения этих функций являются противоположными числами. Значит, соответствующие точки графиков симметричны относительно оси x. Иными словами, график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ может быть получен из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью симметрии относительно оси x.

Вообще графики функций $y = ax^2$ и $y = -ax^2$ (при $a \neq 0$) симметричны относительно оси x.

График функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$, как и график функции $y = x^2$, называется *параболой*.

Сформулируем свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$. График функции проходит через начало координат.**
2. **Если $x \neq 0$, то $y > 0$. График функции расположен в верхней полуплоскости.**
3. **Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. График функции симметричен относительно оси y.**
4. **Функция убывает в промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает в промежутке $[0; +\infty)$.**
5. **Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток $[0; +\infty)$.**

Докажем свойство 4.

● Пусть x_1 и x_2 — два значения аргумента, причем $x_2 > x_1$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции. Составим разность $y_2 - y_1$ и преобразуем ее:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Так как $a > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то произведение $a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ имеет тот же знак, что и множитель $x_2 + x_1$. Если числа x_2 и x_1 принадлежат промежутку $(-\infty; 0]$, то этот множитель отрицателен. Если числа x_2 и x_1 принадлежат промежутку $[0; +\infty)$, то множитель $x_2 + x_1$ положителен. В первом случае $y_2 - y_1 < 0$, т. е. $y_2 < y_1$; во втором случае $y_2 - y_1 > 0$, т. е. $y_2 > y_1$. Значит, в промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает, а в промежутке $[0; +\infty)$ возрастает. ○

Теперь сформулируем свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** График функции проходит через начало координат.
2. **Если $x \neq 0$, то $y < 0$.** График функции расположен в нижней полуплоскости.
3. **Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции.** График функции симметричен относительно оси y.
4. **Функция возрастает в промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает в промежутке $[0; +\infty)$.**
5. **Наибольшее значение, равное нулю, функция принимает при $x = 0$, наименьшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток $(-\infty; 0]$.**

Доказательство свойства 4 проводится аналогично тому, как это было сделано для функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

Из перечисленных свойств следует, что при $a > 0$ ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Ось y является осью симметрии параболы. Точку пересечения параболы с ее осью симметрии называют *вершиной параболы*. Вершиной параболы $y = ax^2$ является начало координат.

Построение графика, симметричного данному относительно оси x, растяжение графика от оси x или сжатие к оси x — различные виды преобразования графиков функции. Преобразования графиков, рассмотренные нами для функции $y = ax^2$, применимы к любой функции.

График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси x.

График функции $y = af(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения от оси x в a раз, если $a > 1$, и с помощью сжатия к оси x в $\frac{1}{a}$ раза, если $0 < a < 1$.

Упражнения

90. Постройте график функции $y = \frac{1}{4}x^2$. Найдите:

а) значение y при $x = -2{,}5$; $-1{,}5$; $3{,}5$;
б) значения x, при которых $y = 5$; 3; 2;
в) промежуток возрастания и промежуток убывания функции.

91. Постройте график функции $y = -2x^2$ и найдите:

а) значение y при $x = -1{,}5$; $0{,}6$; $1{,}5$;
б) значения x, при которых $y = -1$; -3; $-4{,}5$;
в) промежуток возрастания и промежуток убывания функции.

92. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^2$, $y = 1{,}8x^2$ и $y = \frac{1}{3}x^2$. Сравните значения этих функций при $x = 0{,}5$, $x = 1$ и $x = 2$.

93. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 0{,}4x^2$ и $y = -0{,}4x^2$. Какова область значений каждой из этих функций?

94. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции:

а) $y = -1{,}5x^2$; б) $y = 0{,}8x^2$.

Перечислите свойства этой функции.

95. Изобразите схематически график и перечислите свойства функции:

а) $y = 0{,}2x^2$; б) $y = -10x^2$.

96. Пересекаются ли парабола $y = 2x^2$ и прямая:

а) $y = 50$; б) $y = 100$; в) $y = -8$; г) $y = 14x - 20$?

Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

97. Принадлежит ли графику функции $y = -100x^2$ точка:

а) $M(1{,}5; -225)$; б) $K(-3; -900)$; в) $P(2; 400)$?

98. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = -x^2$ и $y = 2x - 3$. Выполните графическую иллюстрацию.

99. Изобразите схематически графики функций $y = 0{,}01x^2$ и $y = 10x$. Графики этих функций имеют общую точку $O(0; 0)$. Имеют ли графики этих функций другие общие точки? При положительном ответе найдите координаты этих точек.

100. При каких значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку?

101. Площадь круга S (см^2) вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r (см) — радиус круга. Постройте график функции $S = \pi r^2$ и найдите по графику:

а) площадь круга, если его радиус равен 1,3 см; 0,8 см; 2,1 см;
б) радиус круга, площадь которого равна 1,8 см^2; 2,5 см^2; 6,5 см^2.

2 – Ю. Н. Макарычев, 9 кл.

102. Площадь поверхности куба y (см^2) зависит от ребра куба x (см). Задайте эту зависимость формулой. Постройте ее график и найдите по графику:
а) поверхность куба, если его ребро равно 0,9 см; 1,5 см; 1,8 см;
б) длину ребра, если поверхность куба равна 7 см^2; 10 см^2; 14 см^2.

П

103. Сколько корней имеет квадратный трехчлен:

а) $3x^2 - 8x + 2$; б) $-\frac{1}{2}y^2 + 6y - 18$; в) $m^2 - 3m + 3$?

104. Сократите дробь:

а) $\frac{2a - 1}{10a^2 - a - 2}$; б) $\frac{6a^2 - 5a + 1}{1 - 4a^2}$.

105. Решите уравнение

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$$

и отметьте его корни на координатной прямой.

6. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

Рассмотрим другие частные случаи квадратичной функции.

Пример 1. Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

▶ С этой целью в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

(1)

График функции $y = \frac{1}{2}x^2$ изображен на рисунке 25, *а*.

Чтобы получить таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ при тех же значениях аргумента, следует к найденным значениям функции $y = \frac{1}{2}x^2$ прибавить 3.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$:

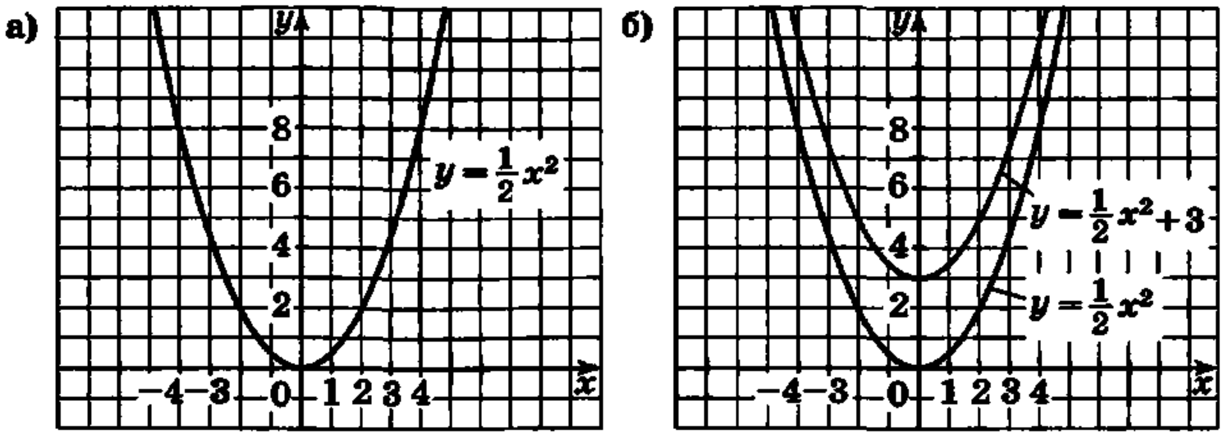


Рис. 25

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	11	7,5	5	3,5	3	3,5	5	7,5	11

(2)

Построим точки, координаты которых указаны в таблице (2), и соединим их плавной линией. Получим график функции $y=\frac{1}{2}x^2+3$ (рис. 25, *б*).

Легко понять, что каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ соответствует единственная точка $(x_0;\ y_0+3)$ графика функции $y=\frac{1}{2}x^2+3$ и наоборот. Значит, если переместить каждую точку графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вверх, то получим соответствующую точку графика функции $y=\frac{1}{2}x^2+3$. Иначе говоря, каждую точку второго графика можно получить из некоторой точки первого графика с помощью параллельного переноса на 3 единицы вверх вдоль оси y.

График функции $y=\frac{1}{2}x^2+3$ — парабола, полученная в результате сдвига вверх на 3 единицы графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$. ◁

Вообще график функции $y=ax^2+n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y=ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n>0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n<0$.

Пример 2. Арка моста имеет форму параболы (рис. 26). Мост удерживают три опоры, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Найдем длины этих опор, если известно, что $AB = 80$ м, $OC = 8$ м, $AK = KO = OL = LB$.

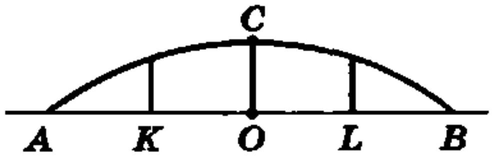


Рис. 26

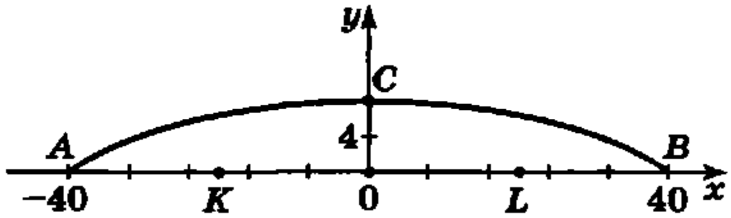


Рис. 27

▶ Составим уравнение параболы, выбрав систему координат так, как показано на рисунке 27. Очевидно, что это уравнение имеет вид $y = ax^2 + n$. Найдем координаты точек A, B и C. Имеем

$$A(-40;\ 0),\ B(40;\ 0),\ C(0;\ 8).$$

Вершиной параболы является точка $C(0;\ 8)$. Значит, $n = 8$. Для отыскания коэффициента a подставим в уравнение $y = ax^2 + 8$ координаты точки $B(40;\ 0)$: $0 = a \cdot 1600 + 8$.

Отсюда $a = -\frac{8}{1600} = -0{,}005$. Мы получили уравнение параболы

$$y = -0{,}005x^2 + 8.$$

Теперь нетрудно найти длины опор:
если $x = -20$, то $y = 6$; если $x = 0$, то $y = 8$;
если $x = 20$, то $y = 6$.

Значит, опоры моста имеют длины 6 м, 8 м и 6 м. ◁

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ и выясним, что представляет собой ее график.

▶ Для этого в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$.

Для построения графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ воспользуемся таблицей (1). Составим теперь таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$. При этом в качестве значений аргумента выберем те, которые на 5 больше соответствующих значений аргумента в таблице (1). Тогда соответствующие им значения функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ будут те же, которые записаны во второй строке таблицы (1):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

(3)

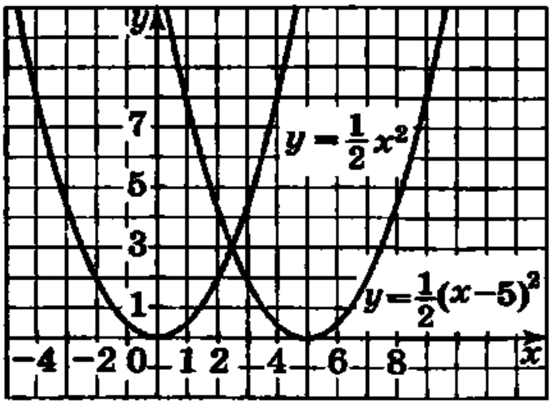


Рис. 28

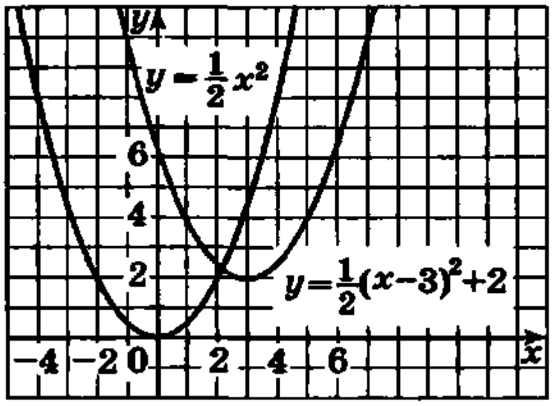


Рис. 29

Построим график функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$, отметив точки, координаты которых указаны в таблице (3) (рис. 28). Нетрудно заметить, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ соответствует единственная точка $(x_0 + 5; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$ и наоборот.

Значит, если переместить каждую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 5 единиц вправо, то получим соответствующую точку графика функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$.

Иначе говоря, каждую точку второго графика можно получить из соответствующей точки первого графика с помощью параллельного переноса на 5 единиц вправо вдоль оси x.

График функции $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$ — парабола, полученная в результате сдвига вправо на 5 единиц графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. ◁

Вообще график функции $y = a(x-m)^2$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

Полученные выводы позволяют понять, что представляет собой график функции $y = a(x-m)^2 + n$. Рассмотрим, например, функцию $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$. Ее график можно получить из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх (рис. 29).

Вообще график функции $y = a(x - m)^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$, и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

Заметим, что производить параллельные переносы можно в любом порядке: сначала выполнить параллельный перенос вдоль оси x, а затем вдоль оси y или наоборот.

Полученные нами выводы о преобразовании графиков применимы к любым функциям.

График функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

График функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

График функции $y = f(x - m) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

При вращении параболы вокруг ее оси получается фигура, которую называют *параболоидом*. Если внутреннюю поверхность параболоида сделать зеркальной и направить на нее пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы, то отраженные лучи соберутся в одной точке, которую называют *фокусом*. В то же время если источник света поместить в фокусе, то отраженные от зеркальной поверхности параболоида лучи окажутся параллельными и не рассеиваются.

Первое свойство позволяет получить в фокусе параболоида высокую температуру. Согласно легенде это свойство использовал древнегреческий ученый Архимед (287–212 гг. до н. э.). При защите Сиракуз в войне против римлян он построил систему параболических зеркал, которая позволила сфокусировать отраженные солнечные лучи на кораблях римлян. В результате температура в фокусах параболических зеркал оказалась настолько высокой, что на кораблях вспыхнул пожар и они сгорели.

Второе свойство используется, например, при изготовлении прожекторов и автомобильных фар.

Упражнения

106. Изобразите схематически график каждой функции (отметьте вершину параболы и направление ее ветвей):

а) $y = \frac{1}{2}x^2$, $\quad y = \frac{1}{2}x^2 + 4$, $\quad y = \frac{1}{2}x^2 - 3$;

б) $y = -\frac{1}{3}x^2$, $\quad y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$, $\quad y = -\frac{1}{3}x^2 - 1$;

в) $y = \frac{1}{5}x^2$, $\quad y = \frac{1}{5}(x - 3)^2$, $\quad y = \frac{1}{5}(x + 3)^2$;

г) $y = -2x^2$, $\quad y = -2(x - 4)^2$, $\quad y = -2(x + 2)^2$.

107. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4$; $\quad$ в) $y = (x - 5)^2$;

б) $y = -x^2 + 3$; $\quad$ г) $y = (x + 3)^2$.

108. Используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2$; $\quad$ в) $y = (x + 4)^2$;

б) $y = -x^2 - 1$; $\quad$ г) $y = -(x - 3)^2$.

109. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = 10x^2 + 5$; $\quad$ в) $y = -6x^2 + 8$; $\quad$ д) $y = -(x - 8)^2$;

б) $y = -7x^2 - 3$; $\quad$ г) $y = (x - 4)^2$; $\quad$ е) $y = -3(x + 5)^2$?

110. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$; $\quad$ в) $y = -4(x - 3)^2 + 5$;

б) $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$; $\quad$ г) $y = -4(x + 2)^2 - 2$.

111. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$; $\quad$ б) $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 3$.

112. Используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте график функции:

а) $y = (x - 2)^2 + 3$; $\quad$ б) $y = -(x - 3)^2 + 5$.

113. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ постройте график функции:

а) $y = (x + 3)^2 - 4$; $\quad$ б) $y = -(x + 4)^2 - 2$.

114. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = 12x^2 - 3$; $\quad$ б) $y = 6x^2 + 4$; $\quad$ в) $y = -x^2 - 4$.

115. При каких значениях a функция $y = ax^2 + 5$ имеет нули?

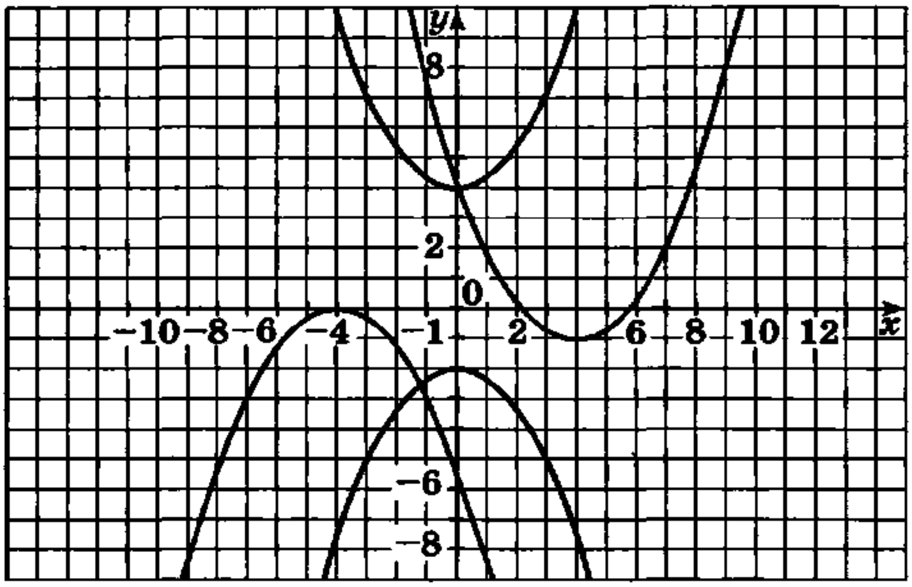


Рис. 30

116. На рисунке 30 изображены графики функций:

а) $y = -\frac{1}{3}(x + 4)^2$; в) $y = \frac{1}{3}x^2 + 4$;

б) $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 - 1$; г) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$.

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

П

117. Решите уравнение:

а) $0{,}6a - (a + 0{,}3)^2 = 0{,}27$; б) $\frac{y^2 - 2y}{4} = 0{,}5y(6 - 2y)$.

118. Решите неравенство:

а) $5x - 0{,}7 < 3x + 5{,}1$; в) $2x + 4{,}2 \leqslant 4x + 7{,}8$;
б) $0{,}8x + 4{,}5 \geqslant 5 - 1{,}2x$; г) $3x - 2{,}6 > 5{,}5x - 3{,}1$.

119. Найдите приращение функции $y = x^2$ при изменении x от 2 до 5 и от 5 до 8. Сравните полученные результаты.

7. Построение графика квадратичной функции

Для построения графика квадратичной функции запишем формулу $y = ax^2 + bx + c$ в виде $y = a(x - m)^2 + n$.

Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отсюда $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Мы получили формулу вида $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y. Отсюда следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, вершиной которой является точка $(m; n)$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

Осью симметрии параболы служит прямая $x = m$, параллельная оси y. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:
1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;
2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;
3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу m вершины удобно находить по формуле $m = -\frac{b}{2a}$. Ординату n можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу $y = ax^2 + bx + c$, так как при $x = m$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n = n.$$

Приведем примеры построения графиков квадратичных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$.

▶ Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты m и n вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 0{,}5} = -3;$$

$$n = 0{,}5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 0{,}5 = -4.$$

Значит, вершина параболы — точка (−3; −4).
Составим таблицу значений функции:

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	4	0,5	−2	−3,5	−4	−3,5	−2	0,5	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ (рис. 31). ◁

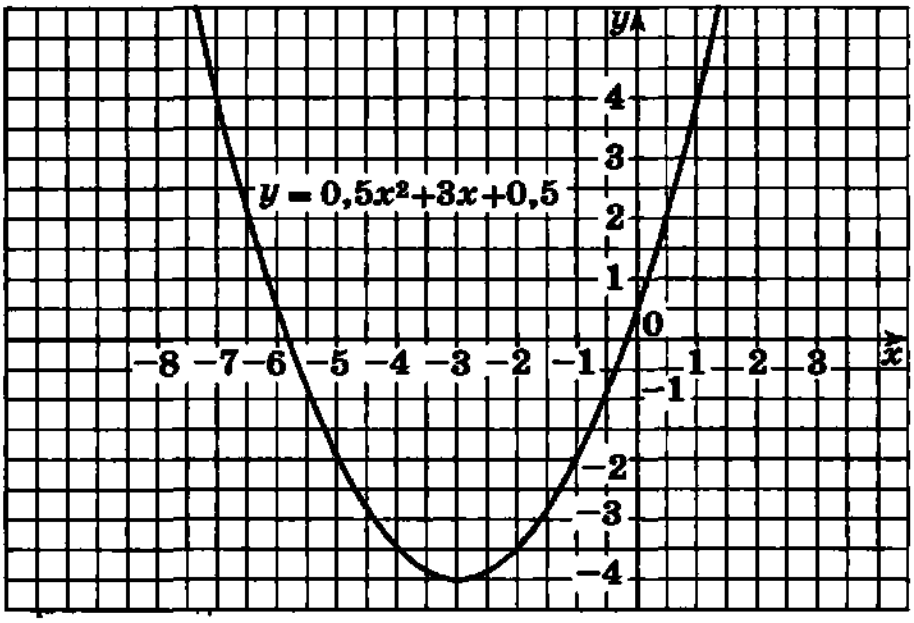


Рис. 31

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая $x = -3$ является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами −4 и −2, −5 и −1, −6 и 0, симметричные относительно прямой $x = -3$ (эти точки имеют одинаковые ординаты).

Пример 2. Построим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

▶ **Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем координаты ее вершины:**

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = 3;$$

$$n = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

x	1	2	3	4	5
y	−9	−3	−1	−3	−9

Соединив плавной линией точки, координаты которых указаны в таблице, получим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$ (рис. 32). ◁

Пример 3. Построим график функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

▶ Графиком функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2;$$

$$n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 0.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$

График функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ изображен на рисунке 33. ◁

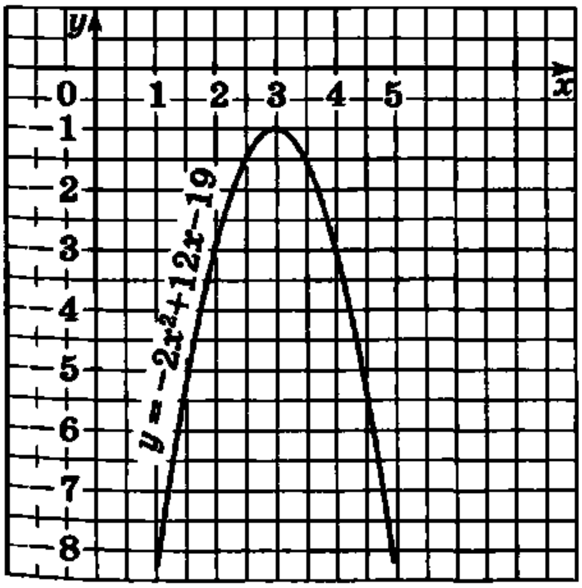


Рис. 32

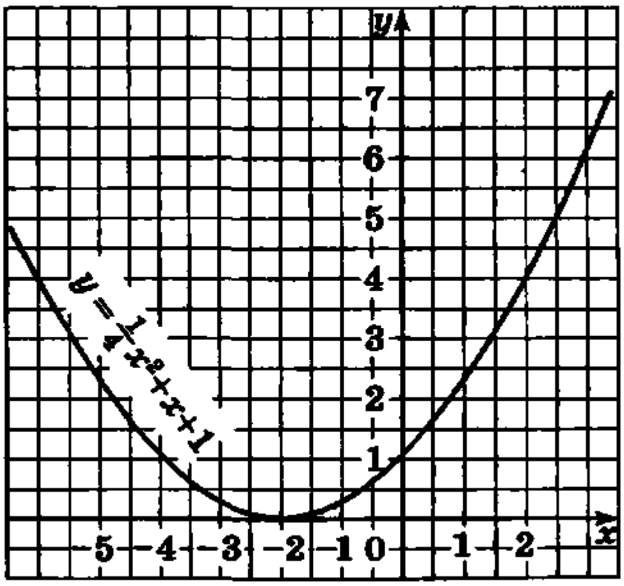


Рис. 33

Упражнения

120. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (м/с) с высоты h_0 (м). Высота h (м), на которой окажется тело через t (с), выражается формулой $h = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0$ ($g \approx 10$ м/с^2).

На рисунке 34 показан график зависимости h от t для случая, когда $h_0 = 20$, $v_0 = 15$. Найдите по графику:

а) сколько времени тело поднималось вверх;
б) сколько времени оно опускалось вниз;
в) какой наибольшей высоты достигло тело;
г) через сколько секунд тело упало на землю.

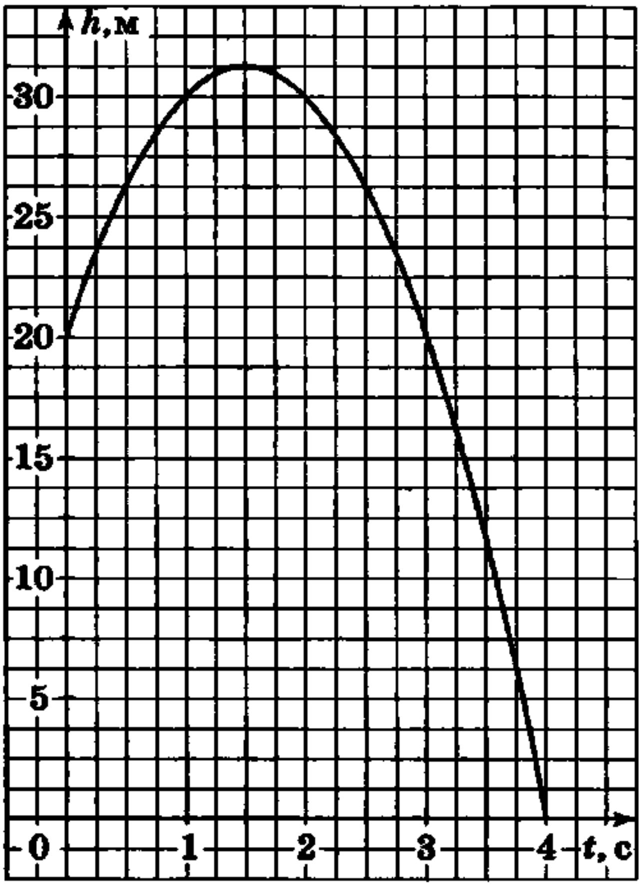


Рис. 34

121. Квадратичная функция задана формулой:

а) $y = x^2 - 4x + 7$;
б) $y = -2x^2 - 5x - 2$.

Найдите координаты вершины параболы. Наметив на координатной плоскости вершину параболы и ее ось симметрии, изобразите схематически график.

122. Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 8$ и найдите, используя график:

а) значение функции при $x = 2{,}5$; $-0{,}5$; -3;
б) значения аргумента, при которых $y = 6$; 0; -2;
в) нули функции и промежутки знакопостоянства;
г) промежутки возрастания и убывания функции, область значений функции.

123. Постройте график функции $y = 2x^2 + 8x + 2$ и найдите, используя график:

а) значение y при $x = -2{,}3$; $-0{,}5$; $1{,}2$;
б) значения x, при которых $y = -4$; -1; $1{,}7$;
в) нули функции и промежутки знакопостоянства;
г) промежутки возрастания и убывания функции, наименьшее значение функции.

124. Постройте график функции и опишите ее свойства:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$; в) $y = x^2 + 3x$.

125. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$;

б) $y = x^2 - 4x$;

в) $y = -x^2 + 6x - 9$.

126. Постройте график функции:

а) $y = 0,5x^2 - 2$;

б) $y = x^2 - 4x + 4$;

в) $y = -x^2 + 2x$.

127. Постройте график функции:

а) $y = (x - 2)(x + 4)$;

б) $y = -x(x + 5)$.

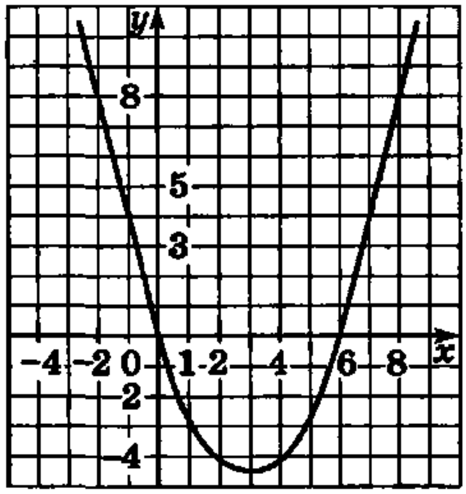


Рис. 35

128. Выясните, график какой из функций

$$y = x^2 + 6x,\ y = \frac{1}{2}x^2 - 3x,\ y = -x^2 - 6$$

изображен на рисунке 35.

129. Найдите значение b, при котором прямая $y = 6x + b$ касается параболы $y = x^2 + 8$.

130. При каком значении n графики функций $y = 2x^2 - 5x + 6$ и $y = x^2 - 7x + n$ имеют только одну общую точку? Найдите координаты этой точки.

П

131. Сократите дробь

$$\frac{(1 - 3a)^2}{3a^2 + 5a - 2}.$$

132. Изобразите схематически график функции и укажите область ее значений:

а) $y = x^2 + 3$;

б) $y = (x + 1)^2$;

в) $y = -x^2 + 2$.

133. Решите уравнение:

а) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 - 2x + 2$;

б) $(2x - 3)(2x + 3) - 1 = 5x + (x - 2)^2$.

П

134. Если с каждого гектара участка соберут 35 ц пшеницы, то план недовыполнят на 20 т; если с каждого гектара будет получено 42 ц, то план перевыполнят на 50 т. Какова площадь участка?

135. Если на каждую машину грузить 3,5 т груза, то останется 4 т; если на каждую машину грузить 4,5 т, то для полной загрузки всех машин не хватит 4 т груза. Сколько было машин?

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте определение квадратичной функции.

2 Сформулируйте свойства квадратичной функции $y = ax^2$: а) при $a > 0$; б) при $a < 0$.

3 Как из графика функции $y = ax^2$ можно получить график функции: а) $y = ax^2 + n$; б) $y = a(x - m)^2$; в) $y = a(x - m)^2 + n$?

4 Что представляет собой график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$? На примере функции $y = 2x^2 - 12x + 16$ покажите, как строят график квадратичной функции.

§ 4. [redacted]НАЯ ФУНКЦИЯ. [redacted] n-Й СТЕПЕНИ

8. Функция $y = x^n$

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = x^n$, где x — независимая переменная, а n — натуральное число. Такую функцию называют *степенной функцией с натуральным показателем*.

Степенные функции при $n = 1$, 2 и 3, т. е. функции $y = x$, $y = x^2$ и $y = x^3$, мы уже рассматривали. Их свойства и графики нам известны.

Выясним теперь свойства степенной функции и особенности ее графика при любом натуральном n.

Выражение x^n, где n — натуральное число, имеет смысл при любом x. Поэтому областью определения степенной функции с натуральным показателем является множество всех действительных чисел.

Сначала рассмотрим случай, когда показатель n — четное число. Свойства функции $y = x^n$ при четном n аналогичны свойствам функции $y = x^2$.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** График функции проходит через начало координат.
2. **Если $x \neq 0$, то $y > 0$.** Это следует из того, что четная степень как положительного, так и отрицательного числа положительна. График функции расположен в первой и второй координатных четвертях.
3. **Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции.** Это следует из того, что при четном n равенство $(-x)^n = x^n$ верно при любых значениях x.
4. **Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в промежутке $(-\infty; 0]$.**
5. **Область значений функции есть множество неотрицательных чисел.**

Докажем свойство 4. Пусть x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[0; +\infty)$ и $x_2 > x_1$. Если $x_1 = 0$, то очевидно, что $x_2^n > x_1^n$. Если $x_1 > 0$, то, перемножив почленно n одинаковых неравенств $x_2 > x_1$ с положительными членами, получим верное неравенство $x_2^n > x_1^n$. Значит, в промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. Пусть теперь x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(-\infty; 0]$ и $x_2 > x_1$. Тогда $-x_1 > -x_2$, причем $-x_1$ и $-x_2$ принадлежат промежутку $[0; +\infty)$, и по доказанному выше $(-x_1)^n > (-x_2)^n$. Отсюда в силу четности n следует, что $x_1^n > x_2^n$, т. е. $x_2^n < x_1^n$. Значит, в промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.

С возрастанием x график функции слева от начала координат опускается вниз, а справа поднимается вверх.

Остановимся теперь на свойстве 5. Мы установили, что при любом x и четном n функция принимает неотрицательные значения. Можно доказать, что любое неотрицательное число является значением степенной функции с натуральным показателем при некотором $x \geqslant 0$. Значит, область значений функции — промежуток $[0; +\infty)$. График функции пересекает любая прямая $y = a$, если $a \geqslant 0$. Если же $a < 0$, то прямая $y = a$ не пересекает график.

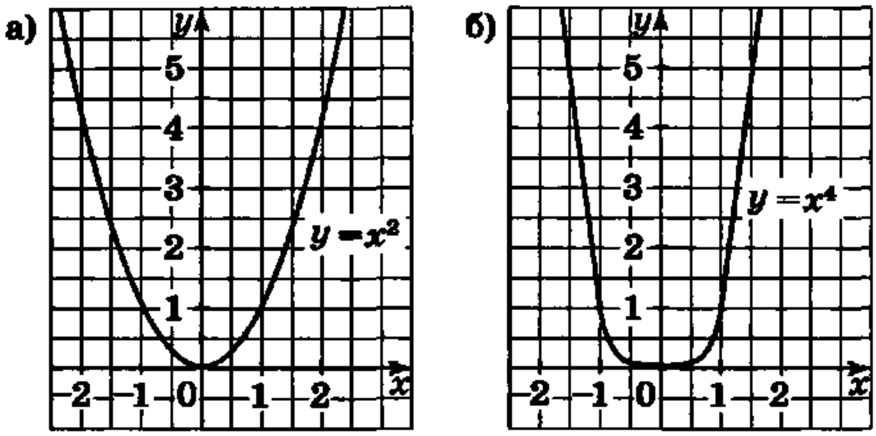


Рис. 36

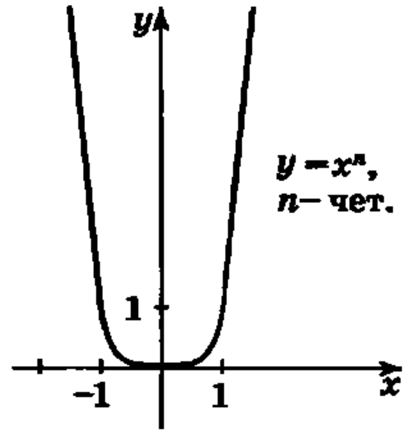


Рис. 37

На рисунке 36 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$. На рисунке 37 показано, как выглядит график функции $y = x^n$ с четным показателем n.

Рассмотрим теперь свойства степенной функции $y = x^n$ при нечетном n. Эти свойства аналогичны свойствам функции $y = x^3$.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$. График функции проходит через начало координат.**
2. **Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. График функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.**
3. **Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции. Это следует из того, что при нечетном n для любого x верно равенство $(-x)^n = -x^n$.**
4. **Функция возрастает на всей области определения.**
5. **Область значений функции есть множество всех действительных чисел.**

Докажем свойство 4. Доказательство того, что функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$, такое же, как для степенной функции с четным показателем.

Докажем, что функция возрастает так же и в промежутке $(-\infty; 0]$. Пусть x_1 и x_2 принадлежат этому промежутку и $x_2 > x_1$. Тогда $0 \leqslant -x_2 < -x_1$. Так как $-x_2 \geqslant 0$ и $-x_1 > 0$, то $(-x_2)^n < (-x_1)^n$. В силу нечетности числа n заключаем, что $-x_2^n < -x_1^n$. Отсюда $x_2^n > x_1^n$. Значит, функция возрастает и в промежутке $(-\infty; 0]$.

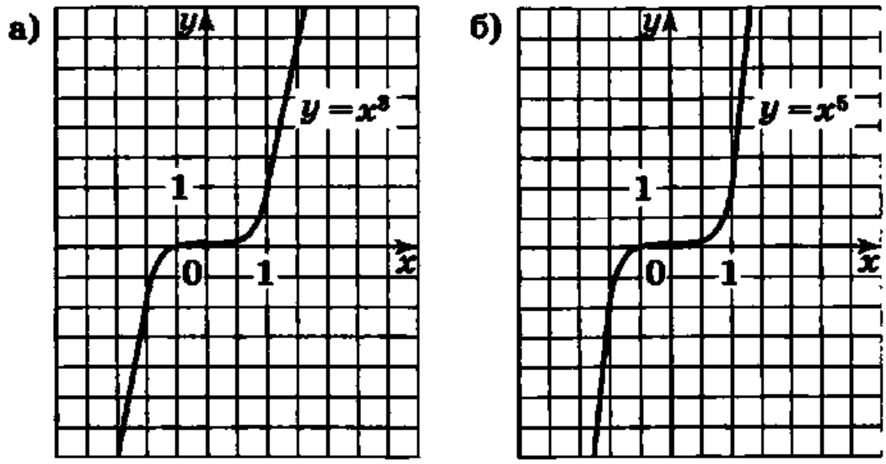


Рис. 38

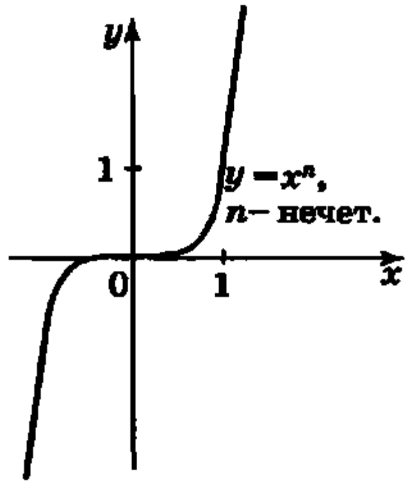


Рис. 39

Если же $x_1 < 0$, а $x_2 > 0$, то очевидно, что $x_2^n > x_1^n$. Значит, функция возрастает на всей области определения. График функции с возрастанием x поднимается вверх.

Свойство 5 следует из свойств 1—3 и из того, что любое неотрицательное число является значением степенной функции с натуральным показателем при некотором $x \geqslant 0$. График функции пересекает любая прямая $y = a$.

На рисунке 38 изображены графики функций $y = x^3$ и $y = x^5$. На рисунке 39 показано, как выглядит график функции $y = x^n$ с нечетным показателем $n > 1$.

Упражнения

136. Функция задана формулой $y = x^{36}$. Сравните с нулем значение этой функции при $x = -5$; 0; 3.

137. Сравните с нулем значение функции $y = x^{49}$ при $x = -9$; 0; 7.

138. Функция задана формулой $f(x) = x^{20}$. Сравните:
а) $f(3{,}7)$ и $f(4{,}2)$;　в) $f(-7)$ и $f(6)$;
б) $f(-5{,}2)$ и $f(-6{,}5)$;　г) $f(31)$ и $f(-28)$.

139. Функция задана формулой $g(x) = x^{35}$. Сравните:
а) $g(8{,}9)$ и $g(7{,}6)$;　в) $g(-10)$ и $g(7)$;
б) $g(-4{,}6)$ и $g(-5{,}7)$;　г) $g(-63)$ и $g(63)$.

140. Сравните:
а) $1{,}2^4$ и $1{,}5^4$;　г) $(-3{,}2)^4$ и $(-3{,}4)^4$;
б) $0{,}8^4$ и $0{,}7^4$;　д) $0{,}3^5$ и $0{,}8^5$;
в) $0{,}9^4$ и 1;　е) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$ и $\left(-\frac{1}{4}\right)^5$.

141. Сравните:

а) $5{,}7^3$ и $5{,}4^3$; г) $1{,}6^6$ и $1{,}8^6$;
б) $(-4{,}1)^3$ и $(-4{,}2)^3$; д) $(-5{,}3)^6$ и $(-4{,}2)^6$;
в) $0{,}8^3$ и $(-1{,}3)^3$; е) $2{,}1^6$ и $3{,}1^6$.

142. Проходит ли график функции $y = x^5$ через точку $A(3;\ 243)$? $B(-3;\ 243)$? $C(5;\ 3125)$?

143. Принадлежит ли графику функции $y = x^7$ точка $A(2;\ 128)$? $B(-2;\ -128)$? $C(-3;\ 2187)$?

144. Используя калькулятор, найдите с точностью до 0,01 значение функции $y = x^5$ при:

а) $x = 0{,}72$; б) $x = 2{,}6$; в) $x = -3{,}4$.

145. Изобразите схематически график функции:

а) $y = x^6$; в) $y = x^8$;
б) $y = x^7$; г) $y = x^9$.

146. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = x^{40}$; б) $y = x^{123}$?

147. Пользуясь рисунком 37 или 39, выясните, сколько решений имеет уравнение:

а) $x^{16} = 2$; в) $x^8 = -3$;
б) $x^{34} = 0$; г) $x^{21} = -7$.

148. На рисунке 40 изображен график функции $y = x^4$. Найдите по графику значения x, при которых:

а) $y = 5$; б) $y = 3{,}5$; в) $y = 8$.

149. Пользуясь графиком (см. рис. 40), решите уравнение:

а) $x^4 = 6$; б) $x^4 = 8{,}5$.

150. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 2$; б) $x^3 = 4$; в) $x^3 = -5$.

151. Укажите какое-нибудь значение аргумента, при котором значение функции $y = x^6$ больше, чем 2^6; 10^6; 10^{12}; 10^{18}.

152. Укажите какое-нибудь значение аргумента, при котором значение функции $y = x^5$ меньше, чем -3^5; -10^5; -10^{20}.

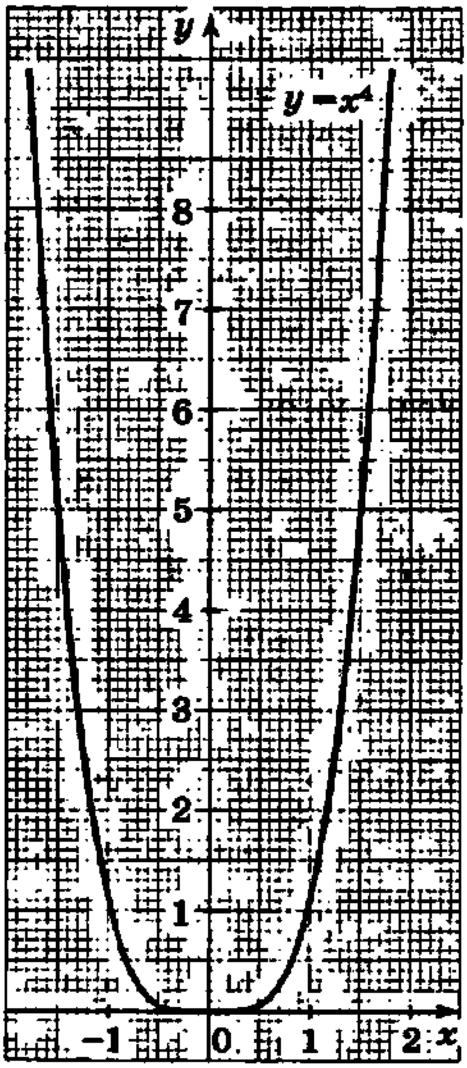


Рис. 40

153. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Вычислите разности $f(1) - f(0)$, $f(2) - f(1)$, $f(3) - f(2)$. Сравните полученные результаты.

154. Выразите формулой зависимость массы m (г) деревянного куба от длины x (см) его ребра, если известно, что куб, ребро которого 10 см, имеет массу 700 г. Постройте график этой зависимости. Пользуясь графиком, найдите:

а) массу куба, ребро которого равно 2 см; 5 см;
б) ребро куба, масса которого равна 30 г; 100 г.

П

155. Используя график функции $y = x^3$, решите уравнение:

а) $x^3 = x + 1$; б) $x^3 = 2x$; в) $x^3 = 2x + 1$.

156. Упростите выражение:

а) $\frac{1-y}{1+y} + \frac{y^2+6y}{y^2-1} : \frac{6+y}{1+y}$; б) $\frac{4x^2-49}{2x+5} \cdot \frac{1}{4x^2+14x} - \frac{2x+7}{4x^2-10x}$.

157. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точка $A(144; 12)$? $B(169; -13)$? $C(-100; 10)$?

9. Корень *n*-й степени

Напомним, что квадратным корнем из числа a называется такое число, квадрат которого равен a. Аналогично определяется корень любой натуральной степени n.

> Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Например, корнем пятой степени из 32 является число 2, так как $2^5 = 32$; корнем четвертой степени из 81 является каждое из чисел 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Корень второй степени принято называть квадратным корнем, а корень третьей степени — *кубическим корнем*.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с нечетным показателем n (рис. 41). Для любого числа a существует единственное значение x, n-я степень которого равна a. Это значение является корнем n-й степени из a. Для записи корня нечетной степени n из числа a используют обозначение $\sqrt[n]{a}$ (читают: «Корень n-й степени из a»). Число n называют *показателем корня*, выражение, стоящее под знаком корня, — *подкоренным выражением*.

Приведем примеры.

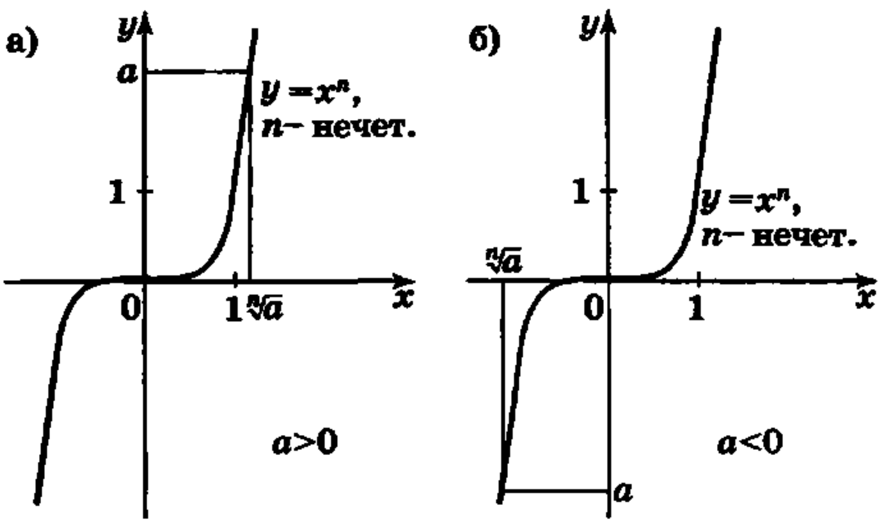


Рис. 41

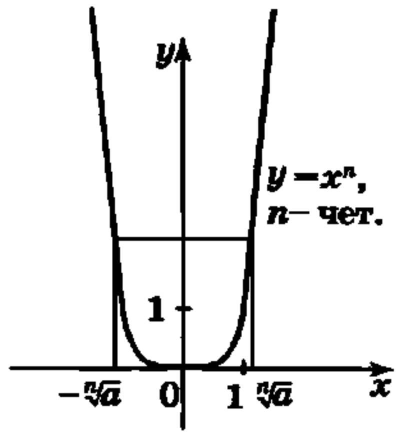


Рис. 42

Запись $\sqrt[3]{125}$ означает кубический корень из 125. Из определения корня следует, что $\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5^3 = 125$. Запись $\sqrt[7]{-128}$ означает корень седьмой степени из -128. Так как $-128 = (-2)^7$, то $\sqrt[7]{-128} = -2$.

Рассмотрим теперь степенную функцию $y = x^n$ с четным показателем n (рис. 42). При любом $a > 0$ существуют два противоположных значения x, n-я степень которых равна a. При $a = 0$ такое число одно (число 0), при $a < 0$ таких чисел нет. Другими словами, если n — четное число и $a > 0$, то существует два корня n-й степени из a. Эти корни являются противоположными числами. Если $a = 0$, то корень n-й степени из a равен нулю. Если $a < 0$ и n — четное число, то корня n-й степени из a не существует.

В случае четного n знаком $\sqrt[n]{a}$ обозначают неотрицательный корень n-й степени из a. Отрицательный корень n-й степени из a (при $a > 0$) записывают так: $-\sqrt[n]{a}$. Выражение $\sqrt[n]{a}$ при четном n и $a < 0$ не имеет смысла.

Например, запись $\sqrt[6]{64}$ означает неотрицательный корень шестой степени из 64. Имеем $\sqrt[6]{64} = 2$, так как 2 — неотрицательное число и $2^6 = 64$.

Если $n = 2$, то показатель корня не пишется.

Итак,

если n — нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a;
если n — четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$.

Из определения корня n-й степени следует, что при всех значениях a, при которых выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, верно равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Выражение $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ имеет смысл как при четном, так и при нечетном n, и значение этого выражения является неотрицательным числом. Его называют *арифметическим корнем n-й степени из a.*

> **Определение.** Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень. Например, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$, так как $\sqrt[3]{-8} = -2$ и $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Вообще при любом нечетном n и положительном a верно равенство $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Вы знаете, что для нахождения с помощью калькулятора приближенного значения квадратного корня используется специальная клавиша $\boxed{\sqrt{}}$. Для корней n-й степени, где $n > 2$, подобных клавиш нет. При нахождении корня n-й степени из положительного числа a используется принятое в математике представление выражения $\sqrt[n]{a}$, где $a > 0$, в виде степени числа a с дробным показателем. По определению, если $a > 0$ и n — натуральное число, большее 1, считают, что $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Корень n-й степени из положительного числа находят с помощью калькулятора, используя клавиши $\boxed{y^x}$ и $\boxed{1/x}$, первая из которых обозначает степень, а вторая — число, обратное x.

Программа вычисления корня n-й степени из положительного числа a выглядит так:

$$\boxed{a}\quad\boxed{y^x}\quad\boxed{n}\quad\boxed{1/x}\quad\boxed{=}$$

Например, чтобы найти $\sqrt[3]{5}$, надо выполнить такую последовательность действий:

$$\boxed{5}\quad\boxed{y^x}\quad\boxed{3}\quad\boxed{1/x}\quad\boxed{=}$$

В результате получим, что $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}7099...$.

Для того чтобы найти с помощью калькулятора значение выражения $\sqrt[5]{-50}$ с точностью до 0,01, найдем сначала $\sqrt[5]{50}$:

$$\boxed{50}\quad\boxed{y^x}\quad\boxed{5}\quad\boxed{1/x}\quad\boxed{=}$$

Округляя результат до 0,01, получим, что $\sqrt[5]{50} \approx 2{,}19$. Отсюда находим, что $\sqrt[5]{-50} = -\sqrt[5]{50} \approx -2{,}19$.

Упражнения

158. Докажите, что:

а) число $\frac{1}{2}$ есть арифметический корень четвертой степени из $\frac{1}{16}$;

б) число 3 есть арифметический кубический корень из 27;

в) число -2 не является арифметическим корнем четвертой степени из 16;

г) число 0,1 не является арифметическим корнем пятой степени из 0,0001.

159. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{361} = 19$; г) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$; ж) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$;

б) $\sqrt[3]{343} = 7$; д) $\sqrt[10]{1} = 1$; з) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

в) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$; е) $\sqrt[7]{0} = 0$;

160. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$;

б) $\sqrt[5]{32}$; д) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$;

в) $\sqrt[12]{1}$; е) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

161. Вычислите:

а) $\sqrt[9]{512}$; г) $\sqrt[5]{-243}$;

б) $\sqrt[3]{1331}$; д) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$;

в) $\sqrt[8]{0}$; е) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$.

162. На рисунке 43 дан график функции $y = x^3$. С помощью этого графика найдите:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{-4}$; в) $\sqrt[3]{-2}$; г) $\sqrt[3]{2}$.

163. Используя график функции $y = x^4$ (см. рис. 40), найдите:

а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt[4]{8}$.

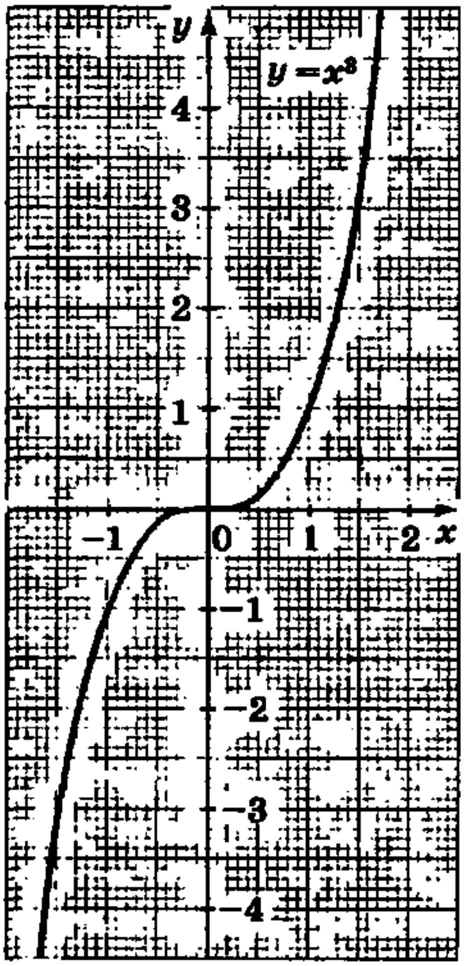


Рис. 43

164 Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt[4]{x}$ точка $E(81; 3)$? $F(81; -3)$? $K(-16; -2)$? $L(0,0001; 0,1)$?

165. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ точка $A(8; 2)$? $B(216; 6)$? $C(27; -3)$? $D(-125; -5)$?

166. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt[3]{3,5}$; б) $\sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{9}$; г) $\sqrt[4]{52}$.

167. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; г) $\sqrt[5]{(-3)^3}$;

б) $\sqrt[7]{-0,28}$; д) $\sqrt[8]{(-2)^3}$;

в) $\sqrt[4]{-5}$; е) $\sqrt[10]{(-7)^2}$?

168. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{-32}$; г) $-4\sqrt[3]{27}$;

б) $\sqrt[7]{-1}$; д) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8}$;

в) $-2\sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$.

169. Выразите корень n-й степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени:

а) $\sqrt[3]{-31}$; б) $\sqrt[5]{-17}$; в) $\sqrt[11]{-2}$; г) $\sqrt[17]{-6}$.

170. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-125}$; в) $-5\sqrt[4]{16}$;

б) $\sqrt[6]{0}$; г) $-3\sqrt[3]{-64}$.

171. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{10})^2$; в) $(-\sqrt[4]{12})^4$;

б) $(\sqrt[3]{5})^3$; г) $(2\sqrt[5]{-2})^5$.

172. Вычислите:

а) $(\sqrt[4]{7})^4$; в) $(2\sqrt[4]{3})^4$;

б) $(\sqrt[7]{-3})^7$; г) $(-3\sqrt[3]{2})^3$.

173. При каких значениях a верно равенство:

а) $\sqrt{a^2} = a$; б) $\sqrt[4]{a^4} = -a$; в) $\sqrt[3]{a^3} = a$?

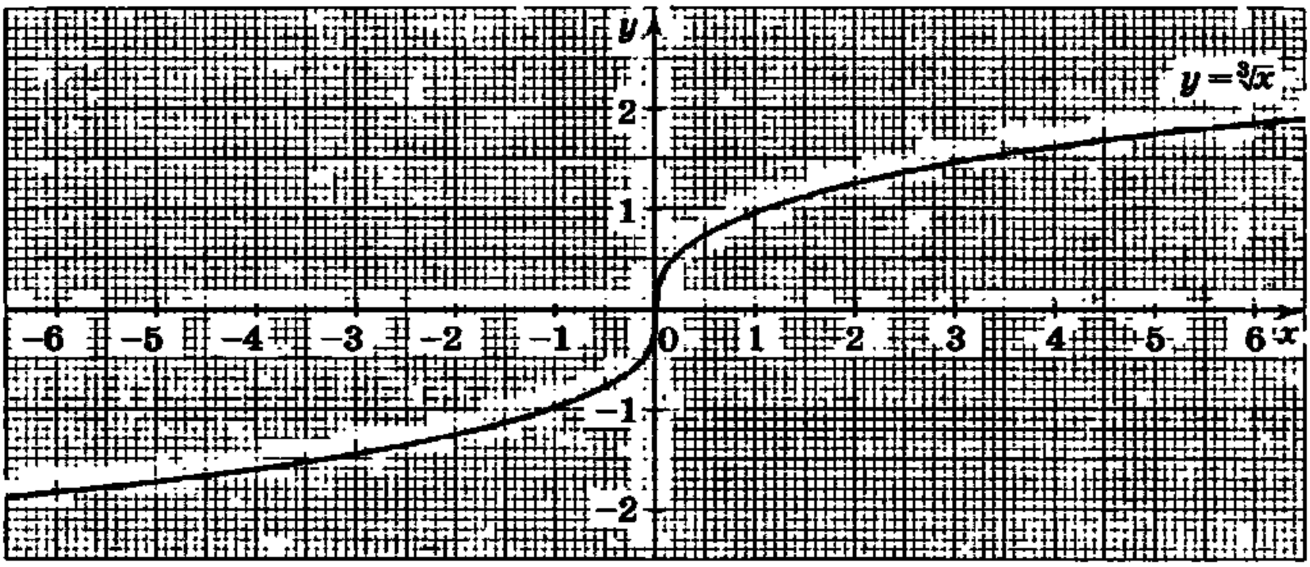


Рис. 44

174. На рисунке 44 изображен график функции $y = \sqrt[3]{x}$. Найдите, используя этот график:

а) $\sqrt[3]{0{,}5}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{-2}$; г) $\sqrt[3]{6}$.

175. Пользуясь калькулятором, найдите с точностью до 0,1:

а) $\sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{30}$; г) $\sqrt[5]{-48}$.

176. Найдите с точностью до 0,01 значение выражения, пользуясь калькулятором:

а) $\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[3]{-38}$; в) $\sqrt[6]{18}$; г) $\sqrt[4]{60}$.

П

177. Постройте график функции:

а) $y = (x-2)^2$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$; в) $y = 2x^2 + 5x$.

178. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x+5} = \frac{14}{x^2+3x-10}$;

б) $\frac{y}{2y-3} + \frac{1}{y+7} + \frac{17}{2y^2+11y-21} = 0$.

179. Упростите выражение

$$\left(\frac{a-5}{a^2-5a+25} - \frac{12a-61}{a^3+125}\right) : \frac{3a-18}{2a^2-10a+50}.$$

Контрольные вопросы

1. Какую функцию называют степенной функцией с натуральным показателем?
2. Сформулируйте свойства степенной функции с четным показателем. Покажите схематически, как выглядит график этой функции.
3. Сформулируйте свойства степенной функции с нечетным показателем n. Покажите схематически, как выглядит график этой функции при $n > 1$.
4. Дайте определение корня n-й степени.

Для тех, кто хочет знать больше

10. Дробно-линейная функция и ее график

Вам известны свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$. Отметим еще одно свойство этой функции и особенность ее графика.

При неограниченном возрастании положительных значений аргумента значения функции, оставаясь положительными, убывают и стремятся к нулю, т. е. если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Аналогично если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$. На графике это свойство проявляется в том, что точки графика по мере их удаления в бесконечность (т. е. при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$) неограниченно приближаются к оси x. Говорят, что ось x, т. е. прямая $y = 0$, является *асимптотой* графика функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.

Вообще асимптотой кривой называется прямая, к которой приближаются как угодно близко точки кривой по мере их удаления в бесконечность.

Гипербола $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ имеет еще одну асимптоту — ось y, т. е. прямую $x = 0$. Нетрудно понять, что гипербола $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ также имеет две асимптоты — ось x и ось y.

Теперь мы познакомимся с дробно-линейными функциями. Примерами таких функций могут служить функции, задаваемые формулами $y = \frac{2x-5}{3x+4}$, $y = \frac{6}{10x-7}$, $y = \frac{x+4}{2x}$. Правые части этих формул — дроби, у которых числитель — многочлен первой степени или число, отличное от нуля, а знаменатель — многочлен первой степени. Такие функции называют *дробно-линейными функциями*.

Вообще дробно-линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, где x — переменная, a, b, c и d — произвольные числа, причем $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$.

Ограничение, что $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, существенно. Если $c = 0$, то мы получим линейную функцию, а при $ad - bc = 0$ — сократимую дробь, значение которой равно $\frac{b}{d}$, т. е. получим константу.

Вы знаете, что график функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$. График функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

Покажем, что графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей. Проиллюстрируем это на примерах построения графиков конкретных дробно-линейных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$.

▶ Для этого выделим из дроби $\frac{2x + 4}{x - 1}$ целую часть, представив дробь в виде $n + \frac{k}{x - m}$.

Имеем

$$\frac{2x + 4}{x - 1} = \frac{2x - 2 + 6}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 6}{x - 1} = 2 + \frac{6}{x - 1}.$$

Здесь $k = 6$, $m = 1$, $n = 2$.

График функции $y = \frac{6}{x - 1} + 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \frac{6}{x}$ на 1 единицу вправо вдоль оси x и сдвига полученного графика $y = \frac{6}{x - 1}$ на 2 единицы вверх в направлении оси y. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: ось x перейдет в прямую $y = 2$, а ось y — в прямую $x = 1$.

Для построения графика данной функции поступим так: про ведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую $x = 1$ и прямую $y = 2$. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две

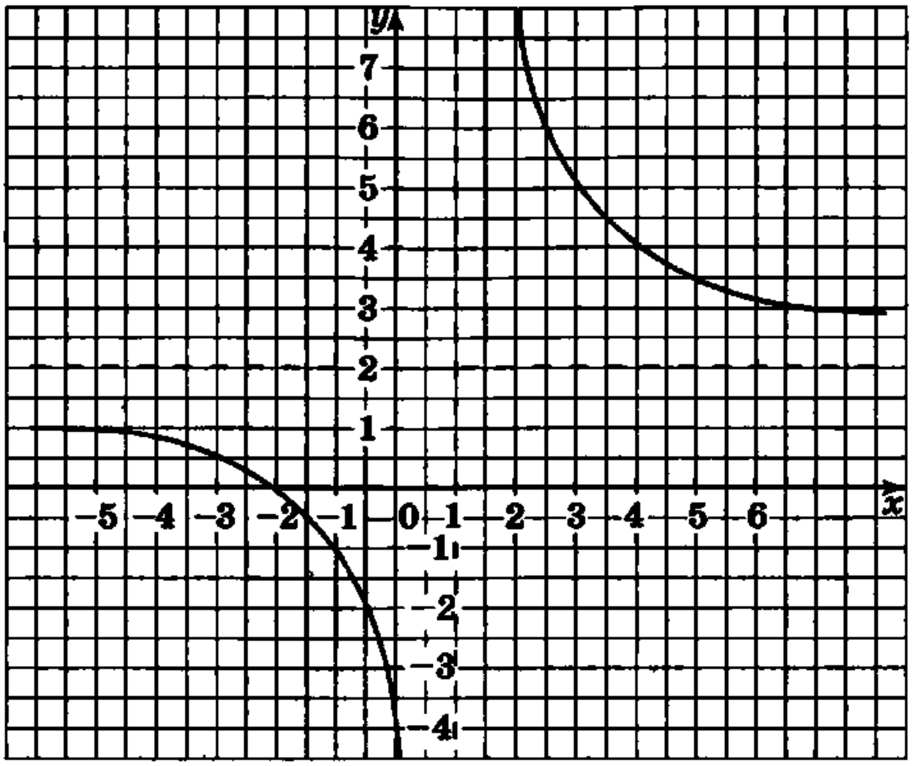


Рис. 45

таблицы: одну для $x < 1$, другую для $x > 1$.

x	-5	-3	-2	-1	0
y	1	$0{,}5$	0	-1	-4

x	2	3	4	5	7
y	8	5	4	$3{,}5$	3

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$ изображен на рисунке 45. ◁

Пример 2. Построим график функции $y = -\frac{2x-1}{x+1}$.

▶ Так же как и в примере 1, выделим из дроби $-\frac{2x-1}{x+1}$ целую часть, т. е. представим дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$. Имеем

$$-\frac{2x-1}{x+1} = -\frac{2x+2-3}{x+1} = -\frac{2(x+1)-3}{x+1} = -\left(2 - \frac{3}{x+1}\right) = -2 + \frac{3}{x+1}.$$

В этом случае $k = 3$, $m = -1$, $n = -2$.

График функции $y = \frac{3}{x+1} - 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{3}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \frac{3}{x}$ на 1 единицу влево и сдвига графика функции $y = \frac{3}{x+1}$ на 2 единицы вниз. При этом асимптотами гиперболы $y = \frac{3}{x+1} - 2$ станут прямые $y = -2$ и $x = -1$.

Далее поступим так. Проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты $y = -2$ и $x = -1$. Составим две таблицы: одну для $x < -1$, другую для $x > -1$.

x	-6	-4	-3	-2
y	$-2{,}6$	-3	$-3{,}5$	-5

x	0	1	2	5
y	1	$-0{,}5$	-1	$-1{,}5$

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = -\frac{2x-1}{x+1}$ изображен на рисунке 46. ◁

В примерах 1 и 2 мы установили, что графиком каждой из функций $y = \frac{2x+4}{x-1}$ и $y = -\frac{2x-1}{x+1}$ является гипербола, и показали один из способов построения графиков этих функций.

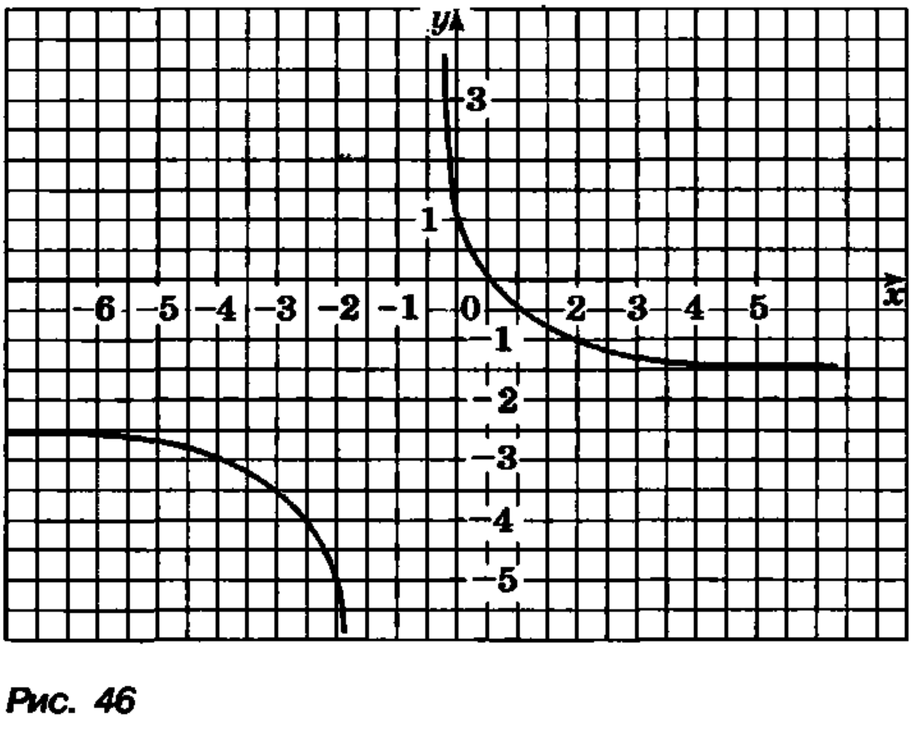


Рис. 46

Можно доказать, что любую дробно-линейную функцию $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ можно представить в виде $y = \frac{k}{x-m} + n$.

Таким образом, графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ с помощью двух параллельных переносов.

Упражнения

180. Укажите асимптоты гиперболы:

а) $y = \frac{10}{x-3} - 2$; б) $y = \frac{8}{x+2} - 3$.

181. Постройте график функции:

а) $y = \frac{4}{x-3}$; в) $y = \frac{4}{x+3}$;

б) $y = \frac{4}{x} + 2$; г) $y = \frac{4}{x} - 2$.

182. Найдите асимптоты гиперболы:

а) $y = \frac{x+8}{x-2}$; б) $y = -\frac{x-8}{x+3}$.

183. Покажите схематически, как расположен график функции $y = \frac{k}{x-m} + n$, где $k < 0$, если:

а) $m > 0$, $n < 0$; б) $m < 0$, $n > 0$.

184. Постройте график функции $y = \frac{3x-2}{x-2}$. Найдите нули функции и промежутки знакопостоянства.

185. Укажите функции, графиками которых являются гиперболы.

1. $y = \frac{15}{x-3}$ 2. $y = \frac{8x-5}{25}$ 3. $y = \frac{37+x}{37-x}$ 4. $y = \frac{8x-40}{5x-25}$

186. Докажите, что графику функции $y = \frac{2x+5}{x-3}$ принадлежат лишь две точки, у которых и абсцисса и ордината — натуральные числа. Найдите координаты этих точек.

187. Найдите все точки графика функции $y = \frac{8x-7}{x}$, у которых и абсцисса и ордината являются целыми числами.

188. Решите графически уравнение $\frac{4x}{x+2} = x - 3$.

189. Постройте график функции $g(x) = \frac{6}{|x-2|}$.

Решите уравнение:

а) $g(x) = 3$; б) $g(x) = 6$; в) $g(x) = -2$.

11. Степень с рациональным показателем

В п.9 говорилось, что выражение $a^{\frac{1}{n}}$, где $a > 0$ и n — натуральное число, обозначает $\sqrt[n]{a}$. Теперь рассмотрим какой смысл имеет выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где a — положительное число, $\frac{m}{n}$ — дробное число.

Определение. Если a — положительное число, $\frac{m}{n}$ — дробное число (m — целое, n — натуральное), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

По определению имеем:

$$0{,}7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{0{,}7^3},\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}},\ 5^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{-1}{6}} = \sqrt[6]{5^{-1}}.$$

Степень с основанием, равным нулю, определяется только для положительного дробного показателя:

если $\frac{m}{n}$ — дробное положительное число (m и n — натуральные), то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Для отрицательных оснований степень с дробным показателем не рассматривается. Такие выражения, как $(-2)^{\frac{3}{4}}$, $(-8)^{-\frac{1}{3}}$, $0^{-\frac{1}{2}}$, не имеют смысла.

Известные нам свойства степени с целым показателем справедливы и для степени с любым рациональным показателем. С их доказательством вы ознакомитесь в старших классах. Перечислим эти свойства.

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q:

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad (1)$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}, \qquad (2)$$

$$(a^p)^q = a^{pq}. \qquad (3)$$

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p:

$$(ab)^p = a^p b^p, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \qquad (5)$$

Рассмотрим примеры, в которых используются тождественные преобразования выражений, содержащих степени с дробными показателями.

Пример 1. Найдем значение выражения

$$\left(x^{\frac{1}{4}}-6\right)^2-12x^{\frac{1}{4}}\left(x^{-\frac{1}{4}}-1\right) \text{ при } x=12{,}25.$$

▶ Предварительно упростим это выражение:

$$\left(x^{\frac{1}{4}}-6\right)^2-12x^{\frac{1}{4}}\left(x^{-\frac{1}{4}}-1\right)=x^{\frac{1}{2}}-12x^{\frac{1}{4}}+36-12x^0+12x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{2}}+24.$$

Подставим в выражение $x^{\frac{1}{2}}+24$ данное значение x и выполним вычисления:

$$x^{\frac{1}{2}}+24=(12{,}25)^{\frac{1}{2}}+24=(3{,}5^2)^{\frac{1}{2}}+24=3{,}5+24=27{,}5. \ \triangleleft$$

Пример 2. Сократим дробь $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{1}{4}}}$.

▶ Разложим на множители числитель и знаменатель дроби. Получим:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}-25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}}-25\right)}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+5\right)}=\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}-5\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+5\right)}{x^{\frac{1}{4}}+5}=x^{\frac{1}{4}}-5. \ \triangleleft$$

Упражнения

190. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

а) $3^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{3}{4}}$, $0{,}2^{0{,}5}$, $7^{-0{,}25}$;

б) $x^{\frac{3}{4}}$, $a^{1{,}2}$, $b^{-0{,}8}$, $c^{2\frac{2}{3}}$;

в) $5a^{\frac{1}{3}}$, $ax^{\frac{3}{5}}$, $-b^{-1{,}5}$, $(2b)^{\frac{1}{4}}$;

г) $(x-y)^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$, $3(a+b)^{\frac{3}{4}}$, $4a^{-\frac{2}{3}}+ax^{\frac{2}{3}}$.

191. Представьте арифметический корень в виде степени с дробным показателем:

а) $\sqrt{1{,}3}$; в) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; д) $\sqrt[7]{a^4}$; ж) $\sqrt[3]{a^2-b^2}$;

б) $\sqrt[3]{7^{-1}}$; г) $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; з) $\sqrt[5]{(x-y)^2}$.

192. Найдите значение выражения:

а) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $0{,}16^{\frac{3}{2}}$; д) $5 \cdot 32^{\frac{1}{5}}$; ж) $6 \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$;

б) $25^{-\frac{1}{2}}$; г) $0{,}64^{-1{,}5}$; е) $-64^{\frac{1}{3}}$; з) $7 \cdot 0{,}04^{-\frac{1}{2}}$.

193. Представьте в виде степени с рациональным показателем:

а) $c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}$; г) $d^5d^{\frac{1}{2}}$; ж) $z^{\frac{1}{5}} : z^{-\frac{1}{2}}$; к) $(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{9}}$;

б) $b^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$; д) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{2}}$; з) $m^{\frac{1}{3}} : m^2$; л) $(c^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$;

в) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{6}}$; е) $y^{\frac{5}{6}} : y^{\frac{1}{3}}$; и) $(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$; м) $(p^3)^{-\frac{2}{9}}$.

194. Упростите выражение:

а) $(a^{0{,}4})^{\frac{1}{2}} \cdot a^{0{,}8}$; в) $a(a^{-1{,}2})^{\frac{3}{4}}$;

б) $(x^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{5}} \cdot x^{1{,}6}$; г) $(a^{0{,}8})^{-\frac{3}{4}} \cdot (a^{-\frac{2}{5}})^{-1{,}5}$.

195. Вычислите:

а) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{0{,}1}$; в) $3 \cdot 9^{0{,}4} \cdot \sqrt[5]{3}$;

б) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{9}}$; г) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$.

196. Представьте:

а) в виде квадрата ($x > 0$): x^6, x^5, x^{-8}, x^{-1}, x, $x^{\frac{1}{3}}$;

б) в виде куба ($y > 0$): y^6, y^7, y, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{-1{,}5}$, $y^{0{,}2}$, $y^{-\frac{2}{9}}$.

197. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3 + 3^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$; д) $\dfrac{c + 2c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} + d}{c - d}$;

б) $\dfrac{10}{10 - 10^{\frac{1}{2}}}$; г) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}} - 5}{b - 25}$; е) $\dfrac{m + n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}$.

198. Напишите формулу, выражающую зависимость между переменными u и v, если:

а) $u = t^{\frac{2}{3}} + 1$, $v = t^{-\frac{2}{3}} + 1$;

б) $u = (t + 2)^{\frac{1}{4}}$, $v = (2 - t)^{\frac{1}{4}}$.

199. Докажите, что если $b = \frac{4a}{5}$ и $a > 0$, то верно равенство:

$$\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

200. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{6x} + \frac{1}{6+x}$; б) $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-4}$; в) $y = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

201. Длина прямоугольника $ABCD$ (рис. 47) равна 10 см, а ширина — 7 см. Отрезок MN передвигается от отрезка AD до отрезка BC, оставаясь параллельным отрезку AD. Площадь y (см^2) закрашенной части есть функция расстояния x (см) от точки D до точки N. Задайте функцию $y = f(x)$ формулой. Найдите область значений этой функции.

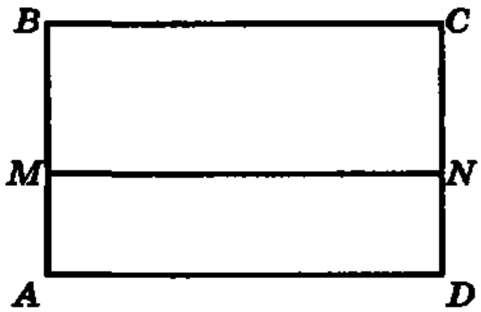


Рис. 47

202. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 6 см, а боковая сторона — 5 см. Концы подвижного отрезка, параллельного основанию, лежат на боковых сторонах. Его длина равна y (см), а расстояние от вершины — x (см). Задайте формулой y как функцию от x. Найдите область значений этой функции.

203. Функция задана формулой $y = \frac{1}{x^2+1}$. Пересекает ли ее график ось x? ось y? В каких координатных четвертях расположен график этой функции?

204. Катер отправляется от пристани A и идет вниз по реке к пристани B, до которой 60 км. После двухчасовой стоянки на пристани B он возвращается обратно. Расстояние l (км), пройденное катером от пристани A, зависит от времени t (ч), отсчитываемого с момента отправления катера из A до момента возвращения. Собственная скорость катера 16 км/ч, скорость течения реки 4 км/ч. Задайте l как функцию от t формулами, постройте график функции, опишите по графику ее свойства и объясните их физический смысл.

3 – Ю. Н. Макарычев, 9 кл.

205. Начертите график какой-нибудь функции, областью определения которой является промежуток $[-3; 4]$, а областью значений — промежуток $[0; 6]$.

206. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = \frac{2x + 11}{10}$; б) $y = \frac{6}{8 - 0{,}5x}$; в) $y = \frac{3x^2 - 12}{4}$.

207. Известно, что $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — возрастающие (убывающие) функции. Докажите, что функция $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ является возрастающей (убывающей) функцией.

208. Известно, что $y = f(x)$ — возрастающая функция и a — некоторое число. Докажите, что уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

209. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + x^2 = 18$; б) $x^3 + 5x = 6$.

210. Какие из функций, заданных формулами $y = x^2$, $y = x^2 + 5$, $y = 2x + 5$, $y = x^3$, $y = -x^2$, $y = -x^2 - 4$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 1$, $y = x^4 + x^2 + 6$, сохраняют знак на всей области определения?

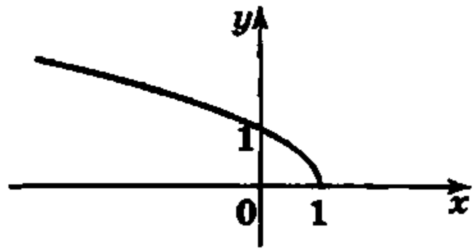


Рис. 48

211. На рисунке 48 изображен график одной из функций $y = \sqrt{x - 1}$, $y = \sqrt{x + 1}$, $y = \sqrt{1 - x}$. Какой именно?

212. Какой из трех графиков, изображенных на рисунке 49, является графиком функции $y = |x - 2|$?

213. Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$ и опишите ее свойства.

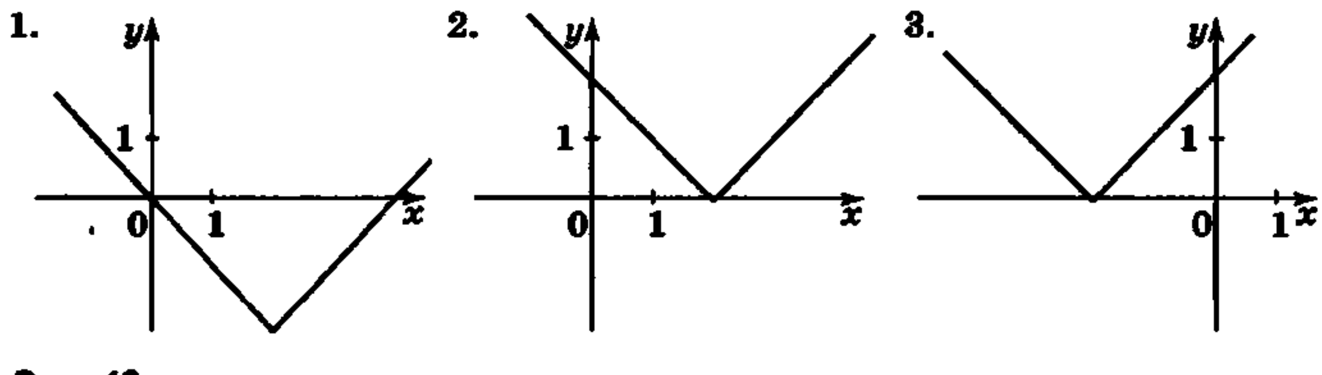


Рис. 49

К параграфу 2

214. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$; в) $-x^2 + 4x - 2\frac{3}{4}$;

б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$; г) $0{,}4x^2 - x + 0{,}2$.

215. Составьте какой-нибудь квадратный трехчлен, корнями которого являются числа:

а) -7 и 2; б) $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.

216. При каком значении p выражение $2px^2 - 2x - 2p - 3$ становится квадратным трехчленом, одним из корней которого является число нуль? Найдите другой корень.

217. Докажите, что квадратный трехчлен имеет корни, и найдите их сумму и произведение:

а) $2x^2 - 10x + 3$; в) $0{,}5x^2 + 6x + 1$;

б) $\frac{1}{3}x^2 + 7x - 2$; г) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.

218. Найдите трехчлен вида $x^2 + px + q$, корнями которого являются не равные нулю числа p и q.

219. Пусть α и β — корни трехчлена $x^2 + px + q$, причем $\alpha\beta = 4$ и $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$. Чему равны α и β?

220. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

а) $2x^2 - 3x + 7$; в) $5x^2 - 3x$;

б) $-3x^2 + 4x - 1$; г) $-4x^2 + 8x$.

221. Докажите, что квадратный трехчлен:

а) $-x^2 + 20x - 103$ не принимает положительных значений;

б) $x^2 - 16x + 65$ не принимает отрицательных значений.

222. Найдите наибольшее или наименьшее значение квадратного трехчлена:

а) $3x^2 - 4x + 5$; б) $-3x^2 + 12x$.

223. Сумма положительных чисел a и b равна 40. При каких значениях a и b их произведение будет наибольшим?

224. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $0{,}8x^2 - 19{,}8x - 5$; в) $x^2 + x\sqrt{2} - 2$;

б) $3{,}5 - 3\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2$; г) $x^2 - x\sqrt{6} + 1$.

225. Зная, что m — целое число, найдите целые корни трехчлена $mx^2 + (m - 3)x - 3$.

226. Зная, что коэффициенты квадратного трехчлена $(n-3)x^2 + (n+1)x + 9 - 2n$ — натуральные числа, найдите этот трехчлен.

227. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2m^2-8}{m^2+6m+8}$; б) $\dfrac{2m^2-5m+2}{mn-2n-3m+6}$.

228. Выполните действие:

а) $\dfrac{x+4}{x-1} - \dfrac{37x-12}{4x^2-3x-1}$; г) $\dfrac{x^2+11x+30}{3x-15} : \dfrac{x+5}{x-5}$;

б) $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{1-x}{x^2+3x+2}$; д) $\dfrac{2x^2-7}{x^2-3x-4} - \dfrac{x+1}{x-4}$;

в) $\dfrac{7x-x^2}{x+4} \cdot \dfrac{x^2-x-20}{7-x}$; е) $\dfrac{2+x-x^2}{2-5x+3x^2} + \dfrac{10x}{3x-2}$.

К параграфу 3

229. При каком значении a график функции $y = ax^2$ проходит через точку:

а) $(5; -7)$; б) $(-\sqrt{3}; 9)$; в) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $(100; 10)$?

230. Постройте график функции, заданной формулой $y = -0{,}25x^2$, где $x \in [-6; 2]$. Каковы наибольшее и наименьшее значения этой функции?

231. При каких значениях a областью значений функции $y = ax^2$ является промежуток: а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$?

232. Докажите, что графики функций $y = ax^2$ и $y = ax$, где $a \neq 0$, пересекаются в точке $(1; a)$. В какой еще точке пересекаются эти графики?

233. Параболу $y = 7x^2$ сдвинули вверх на 5 единиц и влево на 8 единиц. Графиком какой функции является полученная парабола?

234. Какие преобразования надо выполнить, чтобы:

а) из графика функции $y = x^3$ получить графики функций $y = -x^3$, $y = (x-3)^3$, $y = x^3 + 4$;

б) из графика функции $y = \sqrt{x}$ получить графики функций $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 5$, $y = \sqrt{x} - 1$?

235. Постройте в одной координатной плоскости графики функций: $y = |x|$, $y = |x-4|$, $y = |x-4| - 3$.

236. Постройте график функции:

а) $f(x) = |x^2 - 2x|$; б) $f(x) = x^2 - 2|x|$.

237. Постройте график функции:

а) $y = x|x|$; б) $y = -\frac{x^3}{|x|}$.

238. При каких значениях c график функции $y = x^2 - 6x + c$ расположен выше прямой:

а) $y = 4$; б) $y = -1$?

239. При каких значениях b и c вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$ является точка $(6; -12)$?

240. Найдите значение a, при котором осью симметрии параболы $y = ax^2 - 16x + 1$ является прямая $x = 4$.

241. При каких значениях a и c квадратичная функция $y = ax^2 + c$ имеет нули?

242. Найдите значения a и b, при которых график функции $y = ax^2 + bx - 18$ проходит через точки $M(1; 2)$ и $N(2; 10)$.

243. Постройте график функции и опишите ее свойства:

а) $y = x^2 + 2x - 15$; г) $y = 6x - 2x^2$;
б) $y = 0,5x^2 - 3x + 4$; д) $y = (2x - 7)(x + 1)$;
в) $y = 4 - 0,5x^2$; е) $y = (2 - x)(x + 6)$.

244. Найдите область значений функции:

а) $y = 3x^2 - 0,5x + \frac{1}{16}$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5,5$;
б) $y = 2x^2 + 1,2x + 2$; г) $y = -3x^2 - 2x - 4\frac{2}{3}$.

245. Пусть h (м) — высота, на которой находится брошенный с земли вверх мяч, t (с) — время полета мяча. Зависимость h от t выражается формулой $h = 24t - 4,9t^2$. Какой наибольшей высоты достиг мяч? В какой промежуток времени он поднимался и в какой опускался? Через сколько секунд после броска он упал на землю?

246. Задайте формулой какую-либо квадратичную функцию, которая:

а) в промежутке $(-\infty; -3]$ убывает, а в промежутке $[-3; +\infty)$ возрастает;

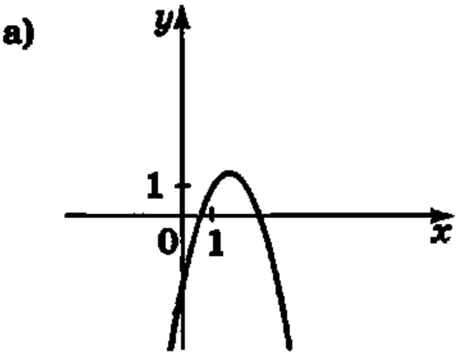
б) в промежутке $(-\infty; 6]$ возрастает, а в промежутке $[6; +\infty)$ убывает.

247. Функция задана формулой $y = x^2 + px + q$. Найдите значения p и q, если известно, что:

а) нули функции — числа 3 и 4;

б) график функции пересекает оси координат в точках $(0; 6)$ и $(2; 0)$;

в) наименьшее значение, равное 24, функция принимает при $x = 6$.



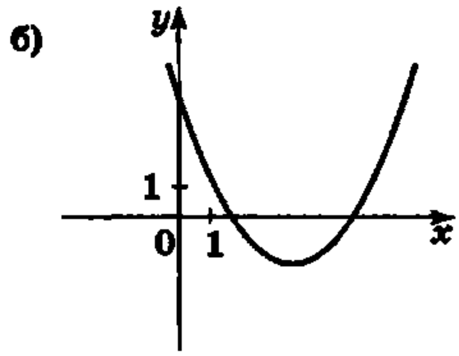


Рис. 50

248. По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 50, *а*, *б*) определите знаки коэффициентов *a*, *b* и *c*.

К параграфу 4

249. Объясните, почему верно неравенство:

а) $5^{100} > 4^{100}$; в) $1{,}5^{261} < 1{,}6^{261}$;

б) $0{,}87^{100} < 0{,}89^{100}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{261} > \left(\frac{3}{5}\right)^{261}$.

250. Сравните значения степеней:

а) 2^{10} и 31^{10}; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{17}$ и $\left(\frac{8}{9}\right)^{17}$; д) 3^{21} и 8^7;

б) $0{,}3^5$ и $0{,}2^5$; г) $\left(\frac{4}{9}\right)^{10}$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$; е) 1250^3 и 36^6.

251. Даны функции $f(x) = x^7$ и $g(x) = x^{10}$. Сравните с нулем:

а) $f(25) - f(12)$; в) $f(0) \cdot f(60)$; д) $g(-9) \cdot g(-17)$;
б) $f(-30) - f(-20)$; г) $g(17) - g(5)$; е) $g(38) - g(0)$.

252. Докажите, что при натуральном n:

а) если $x \in [0; 1]$, то $x^{n+1} \leqslant x^n$;
б) если $x \in (1; +\infty)$, то $x^{n+1} > x^n$.

253. Найдите n, если известно, что график функции $y = x^n$ проходит через точку:

а) $A(2; 8)$; б) $B(3{,}5; 12{,}25)$; в) $C(-3; 81)$; г) $D(-2; -32)$.

254. Существует ли такое натуральное значение n, при котором график функции $y = x^n$ проходит через точку:

а) $A(2; 5)$; б) $B(\sqrt{3}; 81)$; в) $C(-5; 415)$; г) $D(-7; -343)$?

255. Постройте график функции:

а) $y = -x^3$; г) $y = (x - 2)^3 + 1$; ж) $y = (x - 3)^4$;
б) $y = x^3 - 1$; д) $y = -x^4$; з) $y = (x - 3)^4 + 2$.
в) $y = (x - 2)^3$; е) $y = x^4 - 1$;

256. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^{10} = 2$; в) $x^{10} = -3$; д) $x^7 = 0$;
б) $x^{10} = 0$; г) $x^7 = 5$; е) $x^7 = -1$?

257. Найдите значение выражения:

а) $-0{,}5\sqrt[10]{1024}$; в) $1{,}5\sqrt[9]{512}$; д) $\sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[7]{0{,}1^7}$;
б) $-\frac{2}{3}\sqrt[7]{-2187}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt{5\frac{4}{9}}$; е) $\sqrt[4]{16^{-2}} \cdot \sqrt[3]{0{,}125^3}$.

258. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = 0{,}2$; в) $\sqrt[4]{a} = -1$; д) $\sqrt[3]{x} = 1$;
б) $\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}$; г) $\sqrt[4]{b} = 2$; е) $\sqrt[3]{y} = -2$.

259. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt[8]{x-2}$; в) $\sqrt[3]{x+5}$; д) $\sqrt[4]{-5y+6}$;
б) $\sqrt[4]{\frac{9-x}{5}}$; г) $\sqrt[8]{3a-5}$; е) $\sqrt[12]{\frac{6b-9}{11}}$?

260. Сравните значения корней:

а) $\sqrt[3]{23}$ и $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{-5}$ и $\sqrt[3]{-4}$; в) $\sqrt[3]{-0{,}1}$ и $\sqrt[3]{0{,}01}$.

261. Определите знак разности:

а) $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$; в) $1 - \sqrt[4]{0{,}99}$; г) $\sqrt[6]{0{,}28} - \sqrt[6]{\frac{2}{7}}$.

262. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{0{,}1x-2}$; б) $y = \sqrt[4]{5-2x}$; в) $y = \sqrt[3]{8x+1}$.

263. Пользуясь графиками функций $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, решите уравнение и неравенства:

а) $\sqrt{x} = x$, $\sqrt{x} < x$, $\sqrt{x} > x$; б) $\sqrt[3]{x} = x$, $\sqrt[3]{x} < x$, $\sqrt[3]{x} > x$.

264. Постройте график функции:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt[3]{x}$; в) $y = \sqrt{-x}$; г) $y = \sqrt[3]{-x}$.

Чем отличаются друг от друга графики функций $y = -\sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$? $y = -\sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[3]{-x}$?

Глава II УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

12. Целое уравнение и его корни

В каждом из уравнений

$$(x^3 - 1)^2 + x^5 = x^6 - 2(x - 1), \qquad (1)$$

$$\frac{x^4 - 1}{4} - \frac{x^2 + 1}{2} = 3x^2 \qquad (2)$$

обе части являются целыми выражениями. Такие уравнения называют, как известно, *целыми уравнениями*. Напомним, что

> целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого — целые выражения.

В уравнении (1) раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и приведем подобные члены. Получим

$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 = x^6 - 2x + 2,$$
$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 - x^6 + 2x - 2 = 0,$$
$$x^5 - 2x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Выполним аналогичные преобразования в уравнении (2), умножив предварительно обе его части на 4:

$$x^4 - 1 - 2(x^2 + 1) = 12x^2,$$
$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 = 12x^2,$$
$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 - 12x^2 = 0,$$
$$x^4 - 14x^2 - 3 = 0.$$

В каждом из рассмотренных примеров мы выполняли такие преобразования, которые приводят к уравнению, равносильному данному. В результате получали уравнение, имеющее вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Вообще всякое целое уравнение можно заменить равносильным ему уравнением, левая часть которого — многочлен стандартного вида, а правая — нуль.

Если уравнение с одной переменной записано в виде $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называют *степенью уравнения*. Степенью произвольного целого уравнения называют степень равносильного ему уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Например, уравнение (1) является уравнением пятой степени, а уравнение (2) — уравнением четвертой степени.

Уравнение первой степени можно привести к виду $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Из уравнения $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ получаем, что $x = -\frac{b}{a}$. Число $-\frac{b}{a}$ — корень уравнения. Каждое уравнение первой степени имеет один корень.

Уравнение второй степени можно привести к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Число корней такого уравнения зависит от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D < 0$, то уравнение не имеет корней. Любое уравнение второй степени имеет не более двух корней. Для нахождения корней при $D \geqslant 0$ используется, как известно, формула корней квадратного уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Уравнение третьей степени можно привести к виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, уравнение четвертой степени — к виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ и т. д., где a, b, c, ... — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Можно доказать, что уравнение третьей степени имеет не более трех корней, уравнение четвертой степени — не более четырех корней. Вообще уравнение n-й степени имеет не более n корней.

Для уравнений третьей и четвертой степеней известны формулы корней, но эти формулы очень сложны и неудобны для практического применения. Для уравнений пятой и более высоких степеней общих формул корней не существует.

Заметим, что иногда удается решить уравнение третьей и более высокой степени, применяя какой-либо специальный прием. Например, некоторые уравнения нетрудно решить с помощью разложения многочлена на множители.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0.$$

▶ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2(x - 8) - (x - 8) = 0,$$
$$(x - 8)(x^2 - 1) = 0,$$
$$(x - 8)(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Отсюда найдем, что

$$x - 8 = 0, \text{ или } x - 1 = 0, \text{ или } x + 1 = 0.$$

Значит, исходное уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 8,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.\ \triangleleft$$

Уравнения, степень которых выше двух, иногда удается решить, введя новую переменную.

Рассмотрим примеры решения уравнений этим методом.

Пример 2. Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120. \qquad (3)$$

▶ Если перенести все члены уравнения в левую часть и преобразовать получившееся выражение в многочлен стандартного вида, то получится уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x - 96 = 0,$$

для которого трудно найти способ решения.

Однако можно воспользоваться следующей особенностью уравнения (3): в его левой части переменная x входит только в выражение $x^2 - 5x$, которое встречается в уравнении дважды. Это позволяет решить данное уравнение с помощью введения новой переменной. Обозначим $x^2 - 5x$ через y:

$$x^2 - 5x = y.$$

Тогда уравнение (3) сведется к уравнению с переменной y:

$$(y + 4)(y + 6) = 120,$$

которое после упрощения примет вид

$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем его корни:

$$y_1 = -16,\ y_2 = 6.$$

НИЛЬС АБЕЛЬ (1802—1829) — норвежский математик. Основатель общей теории алгебраических функций, внес большой вклад в математический анализ. Впервые доказал неразрешимость в общем случае в радикалах алгебраического уравнения пятой степени и более высоких степеней.

Отсюда

$$x^2 - 5x = -16 \text{ или } x^2 - 5x = 6.$$

Решая уравнение $x^2 - 5x = -16$, найдем, что оно не имеет корней.

Решая уравнение $x^2 - 5x = 6$, найдем, что оно имеет два корня:

$$x_1 = -1, \ x_2 = 6.$$

Значит, уравнение (3) имеет два корня:

$$x_1 = -1, \ x_2 = 6. \ \triangleleft$$

Метод введения новой переменной позволяет легко решать уравнения четвертой степени, имеющие вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, являющиеся квадратными относительно x^2, называют *биквадратными уравнениями.*

Пример 3. Решим биквадратное уравнение

$$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Введем новую переменную, обозначив x^2 через y:

$$x^2 = y.$$

Получим квадратное уравнение с переменной y:

$$9y^2 - 10y + 1 = 0.$$

Решив его, найдем, что

$$y_1 = \frac{1}{9}, \ y_2 = 1.$$

Значит,

$$x^2 = \frac{1}{9} \text{ или } x^2 = 1.$$

Из уравнения $x^2 = \frac{1}{9}$ находим, что

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Из уравнения $x^2 = 1$ находим, что

$$x_3 = -1, \ x_4 = 1.$$

Итак, исходное биквадратное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \ x_2 = \frac{1}{3}, \ x_3 = -1, \ x_4 = 1. \ \triangleleft$$

ЭВАРИСТ ГАЛУА (1811—1832) — французский математик. Заложил основы современной алгебры, ввел ряд фундаментальных ее понятий. Нашел необходимое и достаточное условие, которому удовлетворяет алгебраическое уравнение, разрешимое в радикалах.

Упражнения

265. Какова степень уравнения:

а) $2x^2 - 6x^5 + 1 = 0$; г) $(x + 8)(x - 7) = 0$;
б) $x^6 - 4x^3 - 3 = 0$; д) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 5$;
в) $\frac{1}{7}x^5 = 0$; е) $5x^3 - 5x(x^2 + 4) = 17$?

266. Решите уравнение:

а) $(8x - 1)(2x - 3) - (4x - 1)^2 = 38$;
б) $\frac{(15x-1)(1+15x)}{3} = 2\frac{2}{3}$;
в) $0{,}5y^3 - 0{,}5y(y + 1)(y - 3) = 7$;
г) $x^4 - x^2 = \frac{(1+2x^2)(2x^2-1)}{4}$.

267. Решите уравнение:

а) $(6 - x)(x + 6) - (x - 11)x = 36$;
б) $\frac{1-3y}{11} - \frac{3-y}{5} = 0$;
в) $9x^2 - \frac{(12x-11)(3x+8)}{4} = 1$;
г) $\frac{(y+1)^2}{12} - \frac{1-y^2}{24} = 4$.

268. Докажите, что уравнение $5x^6 + 6x^4 + x^2 + 4 = 0$ не имеет корней.

269. Может ли отрицательное число быть корнем уравнения $12x^5 + 7x^3 + 11x - 3 = 121$?

270. Если ребро куба увеличить на 3 см, то его объем увеличится на 513 см^3. Чему равно ребро куба?

271. Первое число на 5 больше второго, а его куб на 3185 больше куба второго. Найдите эти числа.

272. Решите уравнение:

а) $y^3 - 6y = 0$; д) $9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$;
б) $6x^4 + 3{,}6x^2 = 0$; е) $y^4 - y^3 - 16y^2 + 16y = 0$;
в) $x^3 + 3x = 3{,}5x^2$; ж) $p^3 - p^2 = p - 1$;
г) $x^3 - 0{,}1x = 0{,}3x^2$; з) $x^4 - x^2 = 3x^3 - 3x$.

273. Решите уравнение:

а) $0{,}7x^4 - x^3 = 0$; г) $3x^3 - x^2 + 18x - 6 = 0$;
б) $0{,}5x^3 - 72x = 0$; д) $2x^4 - 18x^2 = 5x^3 - 45x$;
в) $x^3 + 4x = 5x^2$; е) $3y^2 - 2y = 2y^3 - 3$.

274. Решите уравнение:

а) $x^3 + 7x^2 - 6 = 0$; б) $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$.

275. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с осями координат.

276. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(2x^2 + 3)^2 - 12(2x^2 + 3) + 11 = 0$;
б) $(t^2 - 2t)^2 - 3 = 2(t^2 - 2t)$;
в) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 40$;
г) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$.

277. Решите уравнение:

а) $(x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28 = 0$;
б) $(x^2 - 4x)^2 + 9(x^2 - 4x) + 20 = 0$;
в) $(x^2 + x)(x^2 + x - 5) = 84$.

278. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$; г) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
б) $y^4 - 6y^2 + 8 = 0$; д) $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
в) $t^4 + 10t^2 + 25 = 0$; е) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$.

279. Найдите корни биквадратного уравнения:

а) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$; г) $t^4 - 2t^2 - 3 = 0$;
б) $y^4 + 14y^2 + 48 = 0$; д) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$;
в) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$; е) $5y^4 - 5y^2 + 2 = 0$.

280. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = x^4 - 5x^2 + 4$; в) $y = x^4 - 20x^2 + 100$;
б) $y = x^4 + 3x^2 - 10$; г) $y = 4x^4 + 16x^2$.

281. Разложите на множители трехчлен:

а) $x^4 - 47x^2 - 98$; б) $x^4 - 85x^2 + 1764$.

282. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 4(x^2 - 11) = 0$;
б) $3x^2(x - 1)(x + 1) - 10x^2 + 4 = 0$.

283. Решите уравнение:

а) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$;
б) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$.

284. Найдите корни уравнения:

а) $y^7 - y^6 + 8y = 8$; б) $u^7 - u^6 = 64u - 64$.

П

285. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $3x^2 - 25x - 28$; б) $2x^2 + 13x - 7$.

286. Решите неравенство:

а) $13(5x - 1) - 15(4x + 2) < 0$;

б) $6(7 - 0{,}2x) - 5(8 - 0{,}4x) > 0$.

287. Два сварщика, работая вместе, могут выполнить задание за 30 ч. За сколько часов сможет выполнить это задание каждый сварщик, если известно, что первому на выполнение всей работы потребуется времени на 11 ч больше, чем второму?

13. Дробные рациональные уравнения

В каждом из уравнений

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{5}{x + 1}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{x^2} = x + 5, \qquad 2x - 1 = \frac{x}{x + 12}$$

левая и правая части представляют собой рациональные выражения, причем либо оба выражения являются дробными, либо одно из них является дробным, а другое — целым выражением. Такие уравнения, как вы знаете, называются *дробными рациональными уравнениями*. Напомним, что

> дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, причем хотя бы одно из них — дробным выражением.

При решении дробных рациональных уравнений, как вам известно, обычно поступают следующим образом:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- умножают обе части уравнения на этот знаменатель;
- решают получившееся целое уравнение;
- исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.

С простейшими примерами решения дробных рациональных уравнений вы уже встречались. Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{6}{x^2 + 8} - \frac{9x}{(x^2 + 8)(9 - x^2)} = \frac{x^3}{x^4 - x^2 - 72}. \qquad (1)$$

▶ Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен $x^4 - x^2 - 72$. Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

$$6x^2 - 54 + 9x = x^3.$$

Отсюда

$$x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0. \qquad (2)$$

Решим полученное целое уравнение, используя разложение левой части на множители.

Имеем

$$(x^3 - 6x^2) - (9x - 54) = 0,$$
$$x^2(x - 6) - 9(x - 6) = 0,$$
$$(x - 6)(x^2 - 9) = 0,$$
$$(x - 6)(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Значит, уравнение (2) имеет три корня:

$$x_1 = 6,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3.$$

Теперь необходимо проверить, не обращают ли найденные корни в нуль общий знаменатель дробей, входящих в уравнение (1). Если $x = 6$, то $x^4 - x^2 - 72 \neq 0$; если $x = 3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$; если $x = -3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$.

Значит, уравнение (1) имеет единственный корень — число 6.

Ответ: 6. ◁

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-7}.$$

▶ Приведение дробей, входящих в уравнение, к общему знаменателю связано с громоздкими преобразованиями и не позволяет легко найти корни уравнения. Поступим иначе. Воспользуемся тем, что знаменатели дробей представляют собой двучлены вида $x + b$, где b — некоторое число. Преобразуем уравнение так, чтобы в левой и правой его частях были записаны разности дробей, и каждую из разностей заменим дробью.

Получим

$$\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-4},$$
$$\frac{x+2-x+6}{(x-6)(x+2)} = \frac{x-4-x+7}{(x-7)(x-4)},$$
$$\frac{8}{x^2-4x-12} = \frac{3}{x^2-11x+28}.$$

Отсюда

$$8(x^2 - 11x + 28) = 3(x^2 - 4x - 12),$$
$$8x^2 - 88x + 224 = 3x^2 - 12x - 36,$$
$$5x^2 - 76x + 260 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем, что оно имеет два корня:

$$x_1 = 5{,}2 \text{ и } x_2 = 10.$$

Каждое из этих чисел не обращает в нуль знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: 5,2 и 10.

Ответ: 5,2 и 10. ◁

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{2x^2}{x-2} + \frac{3x+2}{2-x} = x. \qquad (3)$$

▶ Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим целое уравнение

$$2x^2 - 3x - 2 = x^2(x - 2). \qquad (4)$$

Разложив на множители квадратный трехчлен $2x^2 - 3x - 2$, представим это уравнение в виде

$$(x - 2)(2x + 1) = x^2(x - 2).$$

Отсюда

$$x^2(x - 2) - (x - 2)(2x + 1) = 0,$$
$$(x - 2)(x^2 - 2x - 1) = 0,$$
$$x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Решив полученные уравнения, найдем, что уравнение (4) имеет три корня: 2, $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$.

Остается проверить, не обращают ли они в нуль знаменатель $x - 2$. Если $x = 2$, то $x - 2 = 0$; если $x = 1 - \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$; если $x = 1 + \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$.

Значит, число 2 не является корнем уравнения (3), а числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ являются его корнями.

Ответ: $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$. ◁

В отдельных случаях удается решить дробное рациональное уравнение, используя введение новой переменной.

Пример 4. Решим уравнение

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} + \frac{7}{x^2 + x - 20} + \frac{1}{4} = 0.$$

▶ Введем новую переменную $y = x^2 + x$. Получим

$$\frac{1}{y-2} + \frac{7}{y-20} + \frac{1}{4} = 0.$$

Отсюда

$$4y - 80 + 28y - 56 + y^2 - 22y + 40 = 0,$$
$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем, что

$$y = 6 \text{ или } y = -16.$$

Уравнение $x^2 + x = 6$ имеет два корня: -3 и 2. Уравнение $x^2 + x = -16$ корней не имеет.
Каждое из чисел -3 и 2 не обращает в нуль знаменатели дробей исходного уравнения и, следовательно, является его корнем.
Ответ: -3, 2. ◁

Упражнения

288. При каких значениях a равно нулю значение дроби:

а) $\frac{a^3 - 9a}{a^2 + a - 12}$;   б) $\frac{a^5 + 2a^4}{a^3 + a + 10}$;   в) $\frac{a^5 - 4a^4 + 4a^3}{a^4 - 16}$?

289. Решите уравнение:

а) $\frac{5y^3 - 15y^2 - 2y + 6}{y^2 - 9} = 0$;   б) $\frac{3y^3 - 12y^2 - y + 4}{9y^4 - 1} = 0$.

290. Решите уравнение:

а) $\frac{2}{x-2} - \frac{10}{x+3} = \frac{50}{x^2 + x - 6} - 1$;

б) $\frac{x+5}{x-1} + \frac{2x-5}{x-7} - \frac{30-12x}{8x - x^2 - 7} = 0$.

291. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{3x-2}{x-1} - \frac{2x+3}{x+3} = \frac{12x+4}{x^2 + 2x - 3}$;

б) $\frac{5x-1}{x+7} - \frac{2x+2}{x-3} + \frac{63}{x^2 + 4x - 21} = 0$;

в) $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} = \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{16}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$.

292. При каких значениях a:

а) сумма дробей $\frac{a+1}{a-2}$ и $\frac{a-4}{a+1}$ равна дроби $\frac{3a+3}{a^2 - a - 2}$;

б) разность дробей $\frac{3a-5}{a^2-1}$ и $\frac{6a-5}{a-a^2}$ равна дроби $\frac{3a+2}{a^2+a}$?

293. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x-9}$;

б) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+21}$.

294. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-5}$;

б) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+28} + \frac{1}{x}$.

295. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = x^2 + x - 9$ и $y = \frac{9}{x}$; б) $y = x^2 + 6x - 4$ и $y = \frac{24}{x}$.

296. При каких значениях a:

а) равны значения выражений $\frac{5a + 7 - 28a^2}{20a}$ и a^2;

б) являются противоположными числами значения выражений $\frac{2 - 18a^2 - a}{3a}$ и $3a^2$?

297. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $\frac{12}{x^2 - 2x + 3} = x^2 - 2x - 1$;

б) $\frac{12}{x^2 + x - 10} - \frac{6}{x^2 + x - 6} = \frac{5}{x^2 + x - 11}$;

в) $\frac{16}{x^2 - 2x} - \frac{11}{x^2 - 2x + 3} = \frac{9}{x^2 - 2x + 1}$.

298. Найдите корни уравнения:

а) $\left(\frac{x + 2}{x - 4}\right)^2 + 16\left(\frac{x - 4}{x + 2}\right)^2 = 17$; б) $\left(\frac{x + 1}{x - 3}\right)^2 + 18\left(\frac{x - 3}{x + 1}\right)^2 = 11$.

299. Решите уравнение:

а) $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3\frac{1}{2}$; б) $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8$.

300. Сумма данного положительного числа и числа, ему обратного, в 13 раз меньше суммы их кубов. Найдите это число.

П

301. Сократите дробь:

а) $\frac{12 - 5x - 2x^2}{15 - 10x}$; б) $\frac{3x^2 - 36x - 192}{x^2 - 256}$.

302. Постройте график функции $y = x^2 - 3$. Укажите промежутки, в которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

303. На строительстве работали две бригады. После 5 дней совместной работы вторую бригаду перевели на другой объект. Оставшуюся часть работы первая бригада закончила за 9 дней. За сколько дней могла бы выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно, если известно, что второй бригаде на выполнение всей работы потребовалось бы на 12 дней меньше, чем одной первой бригаде?

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение с одной переменной называется целым? Приведите пример.
2. Как найти степень целого уравнения?
3. Дайте определение биквадратного уравнения. Объясните, как решают биквадратное уравнение.
4. Какое уравнение называется дробным рациональным? На примере уравнения $\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x-3}=\frac{x^2-7}{x^2-4x+3}$ объясните, как решают дробные рациональные уравнения.

§ 6. [redacted]ВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

14. Решение неравенств второй степени с одной переменной

Неравенства вида

$$ax^2+bx+c>0 \text{ и } ax^2+bx+c<0,$$

где x — переменная, a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$, называют *неравенствами второй степени с одной переменной*.

Решение неравенства

$$ax^2+bx+c>0 \text{ или } ax^2+bx+c<0$$

можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция $y=ax^2+bx+c$ принимает положительные или отрицательные значения. Для этого достаточно проанализировать, как расположен график функции $y=ax^2+bx+c$ в координатной плоскости: куда направлены ветви параболы — вверх или вниз, пересекает ли парабола ось x и если пересекает, то в каких точках.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим неравенство $5x^2+9x-2<0$.

▶ Рассмотрим функцию $y=5x^2+9x-2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Выясним, как расположена эта парабола относительно оси x. Для этого решим уравнение

$$5x^2+9x-2=0.$$

Это уравнение имеет два корня:

$$x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{5}.$$

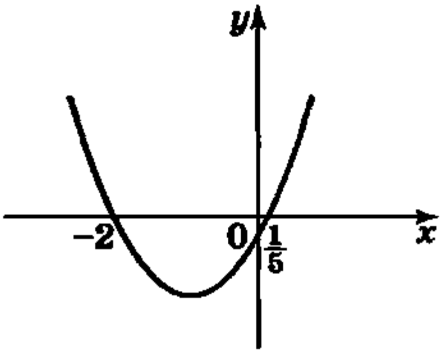


Рис. 51

Значит, парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -2 и $\frac{1}{5}$. Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости (рис. 51). Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения, когда $x \in \left(-2; \frac{1}{5}\right)$. Следовательно, множеством решений неравенства $5x^2 + 9x - 2 < 0$ является числовой промежуток $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$. ◁

Заметим, что при рассмотренном способе решения неравенства нас не интересовала вершина параболы. Важно лишь было знать, куда направлены ветви параболы — вверх или вниз и каковы абсциссы точек ее пересечения с осью x.

Пример 2. Решим неравенство $3x^2 - 11x - 4 > 0$.

▶ График функции $y = 3x^2 - 11x - 4$ — парабола, ветви которой направлены вверх.

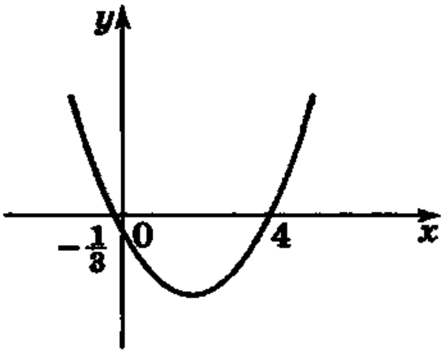


Рис. 52

Для того чтобы выяснить, пересекает ли парабола ось x и в каких точках, решим уравнение $3x^2 - 11x - 4 = 0$. Это уравнение имеет корни

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 4.$$

Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости (рис. 52). Из рисунка видно, что данное неравенство верно, если x принадлежит промежутку $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ или промежутку $(4; +\infty)$, т. е. множеством решений неравенства является объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $(4; +\infty)$.

Ответ можно записать так: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (4; +\infty)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 < 0$.

▶ Рассмотрим функцию

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4.$$

Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз.

Выясним, как расположен график относительно оси x. Решим для этого уравнение $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = 0$.

Это уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Значит, парабола касается оси x.

Изобразив схематически параболу (рис. 53), найдем, что функция принимает отрицательные значения при любом x, кроме 4.

Ответ можно записать так:

x — любое число, не равное 4. ◁

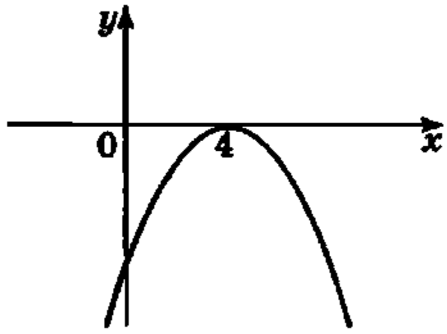


Рис. 53

Пример 4. Решим неравенство $x^2 - 3x + 4 > 0$.

▶ Графиком функции $y = x^2 - 3x + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Чтобы выяснить, как расположена парабола относительно оси x, решим уравнение $x^2 - 3x + 4 = 0$. Находим, что $D = -7 < 0$, т. е. это уравнение не имеет корней. Значит, парабола не имеет общих точек с осью x.

Показав схематически расположение параболы в координатной плоскости (рис. 54), найдем, что функция принимает положительные значения при любом x.

Ответ: x — любое число. ◁

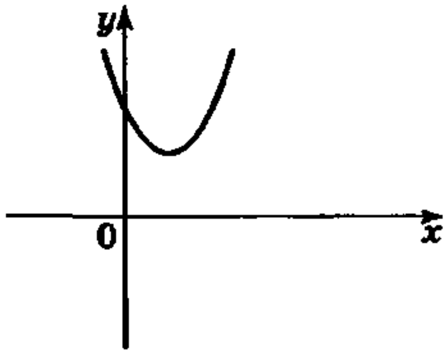


Рис. 54

Итак, для решения неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0$$

поступают следующим образом:

1) находят дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют, имеет ли трехчлен корни;
2) если трехчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трехчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ или в нижней при $a < 0$;
3) находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

Упражнения

304. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 48 < 0$;
б) $2x^2 - 7x + 6 > 0$;
в) $-x^2 + 2x + 15 < 0$;
г) $-5x^2 + 11x - 6 > 0$;
д) $4x^2 - 12x + 9 > 0$;
е) $25x^2 + 30x + 9 < 0$;
ж) $-10x^2 + 9x > 0$;
з) $-2x^2 + 7x < 0$.

305. Найдите множество решений неравенства:

а) $2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$; б) $-6x^2 + 6x + 36 \geqslant 0$; в) $-x^2 + 5 \leqslant 0$.

306. Решите неравенство:

а) $2x^2 + 13x - 7 > 0$;
б) $-9x^2 + 12x - 4 < 0$;
в) $6x^2 - 13x + 5 \leqslant 0$;
г) $-2x^2 - 5x + 18 \leqslant 0$;
д) $3x^2 - 2x > 0$;
е) $8 - x^2 < 0$.

307. Найдите, при каких значениях x трехчлен:

а) $2x^2 + 5x + 3$ принимает положительные значения;
б) $-x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}$ принимает отрицательные значения.

308. Решите неравенство:

а) $x^2 < 16$;
б) $x^2 \geqslant 3$;
в) $0{,}2x^2 > 1{,}8$;
г) $-5x^2 \leqslant x$;
д) $3x^2 < -2x$;
е) $7x < x^2$.

309. Решите неравенство:

а) $0{,}01x^2 \leqslant 1$;
б) $\frac{1}{2}x^2 > 12$;
в) $4x \leqslant -x^2$;
г) $\frac{1}{3}x^2 > \frac{1}{9}$;
д) $5x^2 > 2x$;
е) $-0{,}3x < 0{,}6x^2$.

310. При каких значениях b уравнение имеет два корня:

а) $3x^2 + bx + 3 = 0$; б) $x^2 + 2bx + 15 = 0$?

311. При каких значениях t уравнение не имеет корней:

а) $2x^2 + tx + 18 = 0$; б) $4x^2 + 4tx + 9 = 0$?

312. Найдите множество решений неравенства:

а) $3x^2 + 40x + 10 < -x^2 + 11x + 3$;
б) $9x^2 - x + 9 \geqslant 3x^2 + 18x - 6$;
в) $2x^2 + 8x - 111 < (3x - 5)(2x + 6)$;
г) $(5x + 1)(3x - 1) > (4x - 1)(x + 2)$.

313. Решите неравенство:

а) $2x(3x - 1) > 4x^2 + 5x + 9$;
б) $(5x + 7)(x - 2) < 21x^2 - 11x - 13$.

314. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{12x - 3x^2}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x + 18}}$.

315. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $7x^2 - 10x + 7 > 0$;
б) $-6y^2 + 11y - 10 < 0$;
в) $4x^2 + 12x + 9 \geqslant 0$;
г) $\frac{1}{4}x^2 - 8x + 64 \geqslant 0$;
д) $-9y^2 + 6y - 1 \leqslant 0$;
е) $-5x^2 + 8x - 5 < 0$.

316. Какое из данных выражений принимает положительное значение при любом значении y?

1. $(y - 2)(y - 3) - 4$
2. $(5 - y)(1 - y) + 4$
3. $(5 - y)(1 - y) + 10$
4. $(y - 8)(y - 7) - 60$

317. Докажите, что:

а) $x^2 + 7x + 1 > -x^2 + 10x - 1$ при любом x;
б) $-2x^2 + 10x < 18 - 2x$ при $x \neq 3$.

318. Одна сторона прямоугольника на 7 см больше другой. Какой может быть меньшая сторона, если площадь прямоугольника не превосходит 60 см^2?

319. Длина прямоугольника на 5 см больше ширины. Какую ширину должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь была больше 36 см^2?

320. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0, \\ x^2 - 9 < 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 < 0, \\ x^2 - 4x > 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0, \\ x^2 + 2x - 120 < 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \leqslant 0, \\ x^2 + 4x - 12 \leqslant 0; \end{cases}$
д) $\begin{cases} 2x^2 + 4x + 15 \geqslant 0, \\ x^2 - 9x + 8 \leqslant 0; \end{cases}$
е) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 < 0, \\ 3x^2 + x + 11 < 0. \end{cases}$

321. Укажите все целые значения x, принадлежащие области определения функции:

а) $y = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{9x - x^2 - 14}$;
б) $y = \sqrt{8x - x^2 - 12} + \sqrt{16 - x^2}$.

П

322. Функция задана формулой $y = \frac{0{,}5x - 2}{3}$. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения ее графика с осью x; с осью y. Является ли эта функция возрастающей или убывающей?

323. Решите уравнение:

а) $y^4 - 24y^2 - 25 = 0$;
б) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$.

П

324. Слиток массой 3 кг, содержащий 80% олова и 20% свинца, сплавили с куском олова, после чего процентное содержание олова в слитке составило 94%. Сколько олова добавили в слиток?

15. Решение неравенств методом интервалов

Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 5).$$

Областью определения этой функции является множество всех чисел. Нулями функции служат числа −2, 3, 5. Они разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$ и $(5; +\infty)$ (рис. 55, *а*).

Выясним, каковы знаки этой функции в каждом из указанных промежутков.

Выражение $(x + 2)(x - 3)(x - 5)$ представляет собой произведение трех множителей. Знак каждого из этих множителей в рассматриваемых промежутках указан в таблице:

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 3)$	$(3; 5)$	$(5; +\infty)$
$x + 2$	−	+	+	+
$x - 3$	−	−	+	+
$x - 5$	−	−	−	+

Отсюда ясно, что:

если $x \in (-\infty; -2)$, то $f(x) < 0$;
если $x \in (-2; 3)$, то $f(x) > 0$;
если $x \in (3; 5)$, то $f(x) < 0$;
если $x \in (5; +\infty)$, то $f(x) > 0$.

Мы видим, что в каждом из промежутков $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$, $(5; +\infty)$ функция сохраняет знак, а при переходе через точки −2, 3 и 5 ее знак изменяется (рис. 55, *б*).

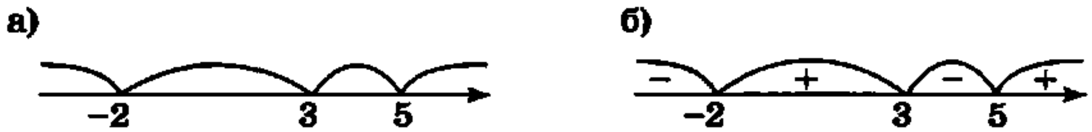


Рис. 55

Вообще пусть функция задана формулой

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где x — переменная, а x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа. Числа x_1, x_2, ..., x_n являются нулями функции. В каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль ее знак изменяется.

Это свойство используется для решения неравенств вида

$$\begin{gathered}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0, \\ (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) < 0,\end{gathered} \qquad (1)$$

где x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа.

Пример 1. Решим неравенство $(x + 6)(x + 1)(x - 4) < 0$.

▶ Это неравенство является неравенством вида (1), так как в левой части записано произведение $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где $x_1 = -6$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 4$. Для его решения удобно воспользоваться рассмотренным выше свойством чередования знаков функции. Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 4)$$

(рис. 56, *а*). Найдем знаки этой функции в каждом из промежутков $(-\infty; -6)$, $(-6; -1)$, $(-1; 4)$ и $(4; +\infty)$. Для этого достаточно знать, какой знак имеет функция в одном из этих промежутков, и, пользуясь свойством чередования знаков, определить знаки во всех остальных промежутках. При этом удобно начинать с крайнего справа промежутка $(4; +\infty)$, так как в нем значения функции $f(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 4)$ заведомо положительны. Это объясняется тем, что при значениях x, расположенных правее всех нулей функции, каждый из множителей $x + 6$, $x + 1$ и $x - 4$ положителен. Используя свойство чередования знаков, определим, двигаясь по координатной прямой справа налево, знаки данной функции в каждом из остальных промежутков (рис. 56, *б*).

Из рисунка видно, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -6)$ и $(-1; 4)$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-1; 4)$. ◁

Рассмотренный способ решения неравенств называют *методом интервалов*.

Приведем примеры решения неравенств методом интервалов.

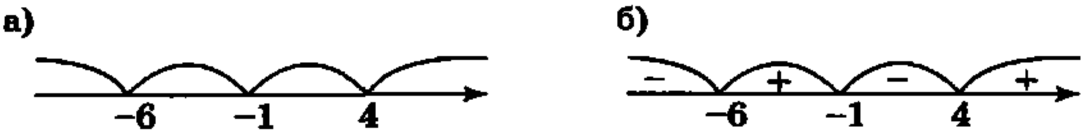


Рис. 56

Рис. 57

Пример 2. Решим неравенство $x(0{,}5 - x)(x + 4) < 0$.

▶ Приведем данное неравенство к виду (1). Для этого в двучлене $0{,}5 - x$ вынесем за скобку множитель -1. Получим

$$-x(x - 0{,}5)(x + 4) < 0,$$

отсюда

$$x(x - 0{,}5)(x + 4) > 0.$$

Мы получили неравенство вида (1), равносильное данному. Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = x(x - 0{,}5)(x + 4)$$

(рис. 57, *а*). Покажем знаком «плюс», что в крайнем справа промежутке функция принимает положительное значение, а затем, двигаясь справа налево, укажем знак функции в каждом из промежутков (рис. 57, *б*). Получим, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-4; 0)$ и $(0{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(-4; 0) \cup (0{,}5; +\infty)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $(5x + 1)(5 - x) \geqslant 0$.

▶ Приведем неравенство к виду (1). Для этого в первом двучлене вынесем за скобки множитель 5, а во втором -1, получим

$$-5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 5) \geqslant 0.$$

Разделив обе части неравенства на -5, будем иметь

$$\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 5) \leqslant 0.$$

Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 5),$$

т. е. точки $-\frac{1}{5}$ и 5, и укажем знаки функции в образовавшихся промежутках (рис. 58). Мы видим, что множество решений неравенства состоит из чисел $-\frac{1}{5}$ и 5 и чисел, заключенных между ними, т. е. представляет собой промежуток $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$.

Рис. 58

Ответ: $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$. ◁

Заметим, что данное неравенство можно решить иначе, используя свойства графика квадратичной функции.

Пример 4. Решим неравенство $\frac{7-x}{x+2} < 0$.

▶ Так как при всех значениях x, при которых дробь $\frac{7-x}{x+2}$ имеет смысл, ее знак совпадает со знаком произведения $(7-x)(x+2)$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$(7-x)(x+2) < 0.$$

Приведя неравенство

$$(7-x)(x+2) < 0$$

к виду (1) и используя метод интервалов, найдем, что множеством решений этого неравенства, а значит, и исходного неравенства $\frac{7-x}{x+2} < 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -2)$ и $(7; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$. ◁

Пример 5. Решим неравенство $\frac{17-2x}{x-4} \geqslant 0$.

▶ Знак дроби $\frac{17-2x}{x-4}$ совпадает со знаком произведения $(17-2x)(x-4)$ при всех значениях x, при которых дробь имеет смысл. Поэтому данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (17-2x)(x-4) \geqslant 0, \\ x-4 \neq 0. \end{cases}$$

Неравенство $(17-2x)(x-4) \geqslant 0$ приведем к виду

$$(x-8{,}5)(x-4) \leqslant 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов и исключив из множества его решений число 4, найдем, что множеством решений исходного неравенства является промежуток $(4; 8{,}5]$.

Ответ: $(4; 8{,}5]$. ◁

Упражнения

325. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x+8)(x-5) > 0$;
б) $(x-14)(x+10) < 0$;
в) $(x-3{,}5)(x+8{,}5) \geqslant 0$;
г) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right) \leqslant 0$.

326. Решите неравенство:

а) $(x+25)(x-30) < 0$;
б) $(x+6)(x-6) > 0$;
в) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right) \leqslant 0$;
г) $(x+0{,}1)(x+6{,}3) \geqslant 0$.

327. Решите неравенство:

а) $(x-2)(x-5)(x-12)>0$;
б) $(x+7)(x+1)(x-4)<0$;
в) $x(x+1)(x+5)(x-8)>0$.

328. Найдите, при каких значениях x:

а) произведение $(x+48)(x-37)(x-42)$ положительно;
б) произведение $(x+0{,}7)(x-2{,}8)(x-9{,}2)$ отрицательно.

329. Решите неравенство:

а) $(x+9)(x-2)(x-15)<0$;
б) $x(x-5)(x+6)>0$;
в) $(x-1)(x-4)(x-8)(x-16)<0$.

330. Найдите множество решений неравенства:

а) $5(x-13)(x+24)<0$;
б) $-\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\geqslant 0$;
в) $(x+12)(3-x)>0$;
г) $(6+x)(3x-1)\leqslant 0$.

331. Решите неравенство:

а) $2(x-18)(x-19)>0$;
б) $-4(x+0{,}9)(x-3{,}2)<0$;
в) $(7x+21)(x-8{,}5)\leqslant 0$;
г) $(8-x)(x-0{,}3)\geqslant 0$.

332. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(5-x)(x+8)}$;
б) $y=\sqrt{(x+12)(x-1)(x-9)}$.

333. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(2x+5)(x-17)}$;
б) $\sqrt{x(x+9)(2x-8)}$?

334. Решите неравенство:

а) $\frac{x-5}{x+6}<0$;
б) $\frac{1{,}4-x}{x+3{,}8}<0$;
в) $\frac{2x}{x-1{,}6}>0$;
г) $\frac{5x-1{,}5}{x-4}>0$.

335. Решите неравенство:

а) $\frac{x-21}{x+7}<0$;
б) $\frac{x+4{,}7}{x-7{,}2}>0$;
в) $\frac{6x+1}{3+x}>0$;
г) $\frac{5x}{4x-12}<0$.

336. Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{x-1}{x-3}\geqslant 0$;
б) $\frac{x+6}{x-5}\leqslant 0$;
в) $\frac{2-x}{x}\geqslant 0$;
г) $\frac{3-2x}{x-1}\leqslant 0$.

337. Решите неравенство:

а) $\frac{x-8}{x+4} > 2$; в) $\frac{7x-1}{x} > 5$;

б) $\frac{3-x}{x-2} < 1$; г) $\frac{6-2x}{x+4} > 3$.

338. Решите неравенство:

а) $\frac{5x+4}{x} < 4$; в) $\frac{x}{x-1} \geqslant 2$;

б) $\frac{6x+1}{x+1} > 1$; г) $\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 1$.

П

339. Напишите уравнение прямой, которая:

а) проходит через начало координат и точку A (0,6; −2,4);

б) пересекает оси координат в точках B (0; 4) и C (−2,5; 0).

340. Два сосуда были наполнены растворами соли, причем в первом сосуде содержалось на 1 л меньше раствора, чем во втором. Концентрация раствора в первом сосуде составляла 10%, а во втором — 20%. После того как растворы слили в третий сосуд, получили новый раствор, концентрация которого составила 16%. Сколько раствора было в каждом сосуде первоначально?

Контрольные вопросы

1 На примере неравенств $3x^2 + 5x - 2 < 0$ и $x^2 + 2x + 6 > 0$ расскажите, как можно решить неравенство второй степени, используя свойства графика квадратичной функции.

2 На примере неравенства $(x-5)(x+7)(x+9) < 0$ расскажите, как решают неравенства методом интервалов.

Для тех, кто хочет знать больше

16. Некоторые приемы решения целых уравнений

Мы уже отмечали, что формулы корней целых уравнений третьей и четвертой степеней с одной переменной громоздки и неудобны для практического использования, а для уравнений пятой и более высоких степеней формул корней вообще не существует. Такие уравнения удается иногда решить, используя специальные приемы.

При решении целых уравнений бывает полезна теорема о корне многочлена, которую мы примем без доказательства.

ТЕОРЕМА 1 **о корне многочлена**

Если число a является корнем многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \text{ где } a_0 \neq 0,$$

то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a)\,P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен $n - 1$-й степени.

Эта теорема позволяет решение целого уравнения n-й степени, для которого известен один из корней, свести к решению уравнения $n - 1$-й степени, в частности, от уравнения третьей степени перейти к квадратному.

Если целое уравнение с одной переменной, с целыми коэффициентами имеет целый корень, то его можно найти, используя теорему о целых корнях целого уравнения.

ТЕОРЕМА 2 **о целых корнях целого уравнения**

Если уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором все коэффициенты — целые числа, причем свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

● Пусть x_0 — целый корень данного уравнения. Тогда верно равенство

$$a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -a_0x_0^n - a_1x_0^{n-1} - \ldots - a_{n-1}x_0,$$

$$a_n = x_0(-a_0x_0^{n-1} - a_1x_0^{n-2} - \ldots - a_{n-1}).$$

Число, записанное в этом равенстве в скобках, является целым, так как x_0 и все коэффициенты $-a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-1}$ — целые числа. Значит, при делении a_n на x_0 получается целое число, т. е. x_0 — делитель свободного члена. ○

Приведем примеры решения целых уравнений с использованием указанных теорем.

Один из приемов решения уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен третьей или более высокой степени, состоит, как известно, в разложении многочлена $P(x)$ на множители.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0.$$

▶ Если это уравнение имеет целый корень, то в силу теоремы 2 он является делителем числа -2, т. е. равен одному из чисел $1, -1, 2, -2$. Проверка убеждает нас, что корнем уравнения является число 2. Значит, в силу теоремы 1 многочлен $x^3 - 8x^2 + 13x - 2$ можно представить в виде $(x - 2)\,F(x)$, где $F(x)$ — многочлен второй степени.

Для того чтобы найти многочлен $F(x)$, разделим многочлен $x^3 - 8x^2 + 13x - 2$ на двучлен $x - 2$. Деление многочленов выполним «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3 - 8x^2 + 13x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2\phantom{{}+13x-2}} & x^2 - 6x + 1 \\
-\;-6x^2 + 13x\phantom{{}-2} & \\
\underline{-6x^2 + 12x\phantom{{}-2}} & \\
-\;x - 2 & \\
\underline{x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Значит, исходное уравнение можно представить в виде

$$(x - 2)(x^2 - 6x + 1) = 0.$$

Отсюда

$$x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Первое уравнение имеет единственный корень — число 2. Второе уравнение имеет два корня: $3 - \sqrt{8}$ и $3 + \sqrt{8}$.

Исходное уравнение имеет три корня: $2,\ 3 - \sqrt{8},\ 3 + \sqrt{8}$. ◁

Еще один прием, который используется при решении целых уравнений третьей и более высоких степеней, состоит, как вы знаете, во введении новой переменной.

Пример 2. Решим уравнение

$$2007(x^4 - 6x^2 + 9) + 2006(x^2 - 3) - 1 = 0.$$

▶ Используем подстановку $y = x^2 - 3$. Получим квадратное уравнение

$$2007y^2 + 2006y - 1 = 0.$$

Применение формулы корней квадратного уравнения приводит здесь к громоздким вычислениям. Поступим иначе. Попытаемся найти целый корень уравнения, если он существует. По теореме 2 он является делителем числа -1, т. е. равен 1 или -1. Подставляя в уравнение числа 1 и -1, убеждаемся, что корнем уравнения является число -1. Второй корень квадратного уравнения найдем, используя теорему Виета. Так как $y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{2007}$ и $y_1 = -1$, то $y_2 = \frac{1}{2007}$.

Из равенств

$$x^2 - 3 = -1 \text{ и } x^2 - 3 = \frac{1}{2007}$$

найдем корни исходного уравнения:

$$x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -\sqrt{3\frac{1}{2007}},\ x_4 = \sqrt{3\frac{1}{2007}}.$$

Ответ: $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3\frac{1}{2007}}$, $\sqrt{3\frac{1}{2007}}$. ◁

Метод введения новой переменной находит применение при решении *возвратных уравнений*.

Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором коэффициенты членов уравнения, одинаково отстоящих от начала и конца, равны, т. е. $a_k = a_{n-k}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим пример решения возвратного уравнения четвертой степени.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

▶ Воспользуемся тем, что коэффициенты членов многочлена, записанного в левой части уравнения, одинаково удаленных от начала и конца, равны между собой.

Разделив обе части уравнения на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем первый член с последним и второй с четвертым, причем во второй сумме вынесем множитель -5 за скобки. Получим

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Введем новую переменную: $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2.$$

Отсюда

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Выполнив подстановку, получим

$$(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0,$$
$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $y_1 = 1$ и $y_2 = 4$.

Значит,

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ или } x + \frac{1}{x} = 4.$$

Решая эти уравнения, найдем, что первое из них не имеет корней, а второе имеет два корня: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

Значит, исходное возвратное уравнение имеет два корня: $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$. ◁

Иногда удается решить целое уравнение, воспользовавшись свойством возрастания или убывания функций.

Пример 4. Решим уравнение $x^5 + x - 2 = 0$.

▶ Если данное уравнение имеет целый корень, то в силу теоремы 2 он является делителем числа −2. Проверка убеждает нас, что корнем уравнения является число 1. Покажем, что других корней это уравнение не имеет. Для этого представим его в виде $x^5 = -x + 2$. Функция $y = x^5$ является возрастающей, а функция $y = -x + 2$ — убывающей. Значит, уравнение $x^5 + x - 2 = 0$ имеет единственный корень. Это хорошо видно на рисунке 59, на котором схематически изображены графики функций $y = x^5$ и $y = -x + 2$.

Итак, исходное уравнение имеет единственный корень — число 1. ◁

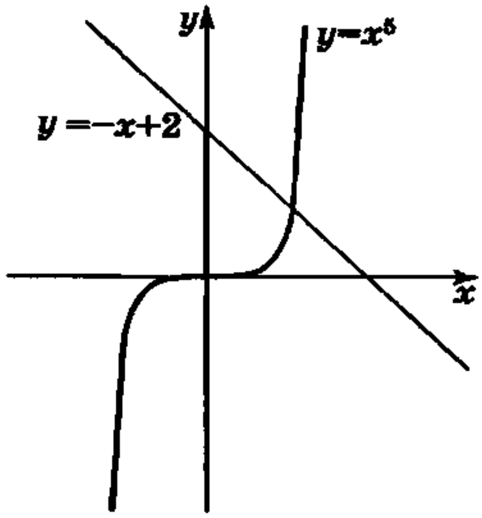


Рис. 59

Упражнения

341. Из данных чисел

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 7,\ -7$$

выберите те, которые являются корнями уравнения

$$x^4 - x^3 - 51x^2 + 49x + 98 = 0.$$

Какие из них можно исключить сразу, не подставляя их в уравнение?

342. Решите уравнение:

а) $x^3 - 4x^3 + 3x + 2 = 0$; б) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

343. При каких значениях p равны значения двучленов:

а) $p^3 - p^2$ и $8p - 12$; б) $p^3 - 3p$ и $p^2 + 1$?

344. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$ с осями координат.

345. Известно, что график функции $y = x^4 - ax^3 - 10x^2 + 80x - 96$ пересекает ось x в точке (4; 0). Найдите a и координаты других точек пересечения графика функции с осью x.

346. Решите уравнение:

а) $718x^4 - 717x^2 - 1 = 0$; б) $206x^4 - 205x^2 - 1 = 0$.

347. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 8x)^2 - 4(x + 4)^2 = 256$;

б) $2(x^2 - 6x)^2 - 120(x - 3)^2 = 8$.

348. Решите уравнение:

а) $x^3 + 11x - 108 = 0$; б) $x^5 + 6x + 44 = 0$.

349. Из данных уравнений выберите то, которое имеет один и только один целый корень.

1. $x^3 - x + 3 = 0$ 2. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
3. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ 4. $x^3 - 5x + 4 = 0$

350. Решите возвратное уравнение

$$10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0.$$

351. Докажите, что если число m является корнем уравнения $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, то обратное ему число также является корнем этого уравнения.

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 5

352. Решите уравнение:

а) $x^5 - x^3 = 0$; б) $x^5 = 4x^4$; в) $0{,}5x^3 = 32x$; г) $0{,}2x^4 = 4x^2$.

353. Найдите корни уравнения:

а) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4) = 25a^2 - 16$;

б) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 1$.

354. Решите уравнение:

а) $x^3 - x^2 - 4(x-1)^2 = 0$; в) $5x^3 - 19x^2 - 38x + 40 = 0$;

б) $2y^3 + 2y^2 - (y+1)^2 = 0$; г) $6x^3 - 31x^2 - 31x + 6 = 0$.

355. Решите уравнение:

а) $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$; б) $x^3 + 4x^2 - 3x - 6 = 0$.

356. Решите уравнение $x^3 = x$ двумя способами: графическим и аналитическим.

357. С помощью графиков выясните, сколько решений может иметь уравнение $x^3 + ax + b = 0$ при различных значениях a и b.

358. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 6x)^2 - 5(x^2 + 6x) = 24$;

б) $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 5) = 3$;

в) $(x^2 + 3x - 25)^2 - 2(x^2 + 3x - 25) = -7$;

г) $(y+2)^4 - (y+2)^2 = 12$;

д) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 3$;

е) $(x^2 - x - 16)(x^2 - x + 2) = 88$;

ж) $(2x^2 + 7x - 8)(2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$.

359. Решите уравнение:

а) $y^7 - y^6 + y = 1$; б) $y^7 + y^6 - 27y = 27$.

360. Решите уравнение:

а) $2x^7 + x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x + 1 = 0$;

б) $x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 4x^3 + x - 2 = 0$.

361. Найдите сумму корней биквадратного уравнения:

а) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$; в) $4x^4 - 12x^2 + 1 = 0$;

б) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$; г) $12y^4 - y^2 - 1 = 0$.

362. Является ли число:

а) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 6x^2 + 3 = 0$;

б) $\sqrt{5-\sqrt{2}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 10x^2 + 23 = 0$?

363. Разложите на множители трехчлен:

а) $x^4 - 20x^2 + 64$; г) $x^4 - 3x^2 - 4$;

б) $x^4 - 17x^2 + 16$; д) $9x^4 - 10x^2 + 1$;

в) $x^4 - 5x^2 - 36$; е) $4x^4 - 17x^2 + 4$.

364. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3y^3 + 12y^2 - 27y - 108}{y^2 - 16} = 0$; б) $\dfrac{y^3 + 6y^2 - y - 6}{y^3 - 36y} = 0$.

365. При каких значениях x разность дробей $\frac{1}{x+2}$ и $\frac{1}{x+4}$ равна разности дробей $\frac{1}{x+8}$ и $\frac{1}{x+20}$?

366. Решите уравнение, используя выделение целой части из дроби:

а) $\frac{x^2-5x+3}{x-5} - \frac{x^2+5x+1}{x+5} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{x^2+6x+10}{x+3} - \frac{x^2-6x+7}{x-3} = 7\frac{1}{8}$.

367. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{1}{x^2-6x+8} - \frac{1}{x-2} + \frac{10}{x^2-4} = 0$;

б) $\frac{3}{x^2-x-6} + \frac{3}{x+2} = \frac{7}{x^2-9}$.

368. Решите уравнение

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1} + \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1} = \frac{4x^3-3x^2+14x-4}{x^4-1}.$$

369. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 = \frac{7x-4}{4x-7}$; б) $x^2 = \frac{5x-3}{3x-5}$.

370. Решите уравнение, обозначив одно из слагаемых через t, а другое через $\frac{1}{t}$:

а) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2\frac{1}{2}$; б) $\frac{x^2+2}{3x-2} + \frac{3x-2}{x^2+2} = 2\frac{1}{6}$.

371. Решите уравнение, используя подстановку $y = x^2$:

а) $\frac{x^4}{x^2-2} + \frac{1-4x^2}{2-x^2} + 4 = 0$; б) $\frac{x^2+3}{x^2+1} + \frac{2}{x^2-4} + \frac{10}{x^4-3x^2-4} = 0$.

372. Решите уравнение:

а) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 16\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = 15$; б) $\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2 - 9\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^2 = 8$.

373. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$; б) $9x^2 - 18x + \frac{9}{x^2} - \frac{18}{x} = 22$.

374. При каких значениях a сумма чисел a и $\frac{1}{a}$ в $3\frac{1}{4}$ раза меньше суммы их кубов?

375. Решите уравнение:

а) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 22\left(x + \frac{1}{x}\right)$; б) $x^3 - \frac{1}{x^3} = 19\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

К параграфу 6

376. Решите неравенство:

а) $x^2 - 5x - 50 < 0$; г) $8p^2 + 2p \geqslant 21$;
б) $-m^2 - 8m + 9 > 0$; д) $12x - 9 \leqslant 4x^2$;
в) $3y^2 + 4y - 4 > 0$; е) $-9x^2 < 1 - 6x$.

377. Докажите, что при любом значении x верно неравенство:

а) $2(x + 1)(x - 3) > (x + 5)(x - 7)$;
б) $\frac{1}{4}(x + 5)(x - 7) \leqslant (x + 2)(x - 4)$.

378. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{144 - 9x^2}}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{16 - 24x + 9x^2}}{x + 2}$.

379. При каких значениях a уравнение $(a + 2)x^2 + 8x + a - 4 = 0$ имеет два корня?

380. При каких значениях b уравнение $(b - 1)x^2 + 6x + b - 3 = 0$ не имеет корней?

381. При каких значениях c не имеет корней уравнение:
а) $x^4 - 12x^2 + c = 0$; б) $x^4 + cx^2 + 100 = 0$?

382. При каких значениях k уравнение $x^4 - 13x^2 + k = 0$ имеет:
а) четыре корня; б) два корня?

383. Найдите общие решения неравенств $x^2 + 6x - 7 \leqslant 0$ и $x^2 - 2x - 15 \leqslant 0$.

384. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 27x - 7 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ 2x^2 - 18 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x^2 + 17x + 6 < 0, \\ x < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 3x^2 - 15x < 0. \end{cases}$

385. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$

386. Решите неравенство:

а) $(x + 1{,}2)(6 - x)(x - 4) > 0$;
б) $\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{7} - x\right) < 0$;
в) $(x + 0{,}6)(1{,}6 + x)(1{,}2 - x) > 0$;
г) $(1{,}7 - x)(1{,}8 + x)(1{,}9 - x) < 0$.

387. При каких значениях x произведение $(3x - 5)(x + 4)(2 - x)$:

а) равно нулю; б) положительно; в) отрицательно?

388. Решите неравенство:

а) $(18x - 36)(x - 7) > 0$; в) $(x + 0{,}8)(4 - x)(x - 20) < 0$;
б) $(x - 7{,}3)(9{,}8 - x) > 0$; г) $(10x + 3)(17 - x)(x - 5) \geqslant 0$.

389. Решите неравенство, разложив его левую часть на множители:

а) $(x^2 - 16)(x + 17) > 0$; г) $x^3 - 0{,}01x > 0$;
б) $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 - 121) < 0$; д) $(x^2 - 9)(x^2 - 1) > 0$;
в) $x^3 - 25x < 0$; е) $(x^2 - 15x)(x^2 - 36) < 0$.

390. Решите неравенство:

а) $(x^2 + 17)(x - 6)(x + 2) < 0$; в) $(x - 1)^2(x - 24) < 0$;
б) $(2x^2 + 1)x(x - 4) > 0$; г) $(x + 7)(x - 4)^2(x - 21) > 0$.

391. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{4}{\sqrt{(3x - 1)(6x + 1)}}$; б) $y = \dfrac{7}{\sqrt{(11x + 2)(x - 4)}}$.

392. Равносильны ли неравенства:

а) $\dfrac{x - 3}{x + 1} \geqslant 0$ и $(x - 3)(x + 1) \geqslant 0$;
б) $\dfrac{x + 5}{x - 8} \leqslant 0$ и $(x + 5)(x - 8) \leqslant 0$?

393. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x - 8}{x + 4} > 0$; в) $\dfrac{x + 1}{3 - x} \geqslant 0$; д) $\dfrac{2x - 4}{3x + 3} \leqslant 0$;
б) $\dfrac{x + 16}{x - 11} < 0$; г) $\dfrac{6 - x}{x - 4} \leqslant 0$; е) $\dfrac{5x - 1}{2x + 3} \geqslant 0$.

394. Решите неравенство:

а) $\dfrac{6x + 2}{x + 4} < 5$; в) $\dfrac{3 - 2x}{3x + 2} \leqslant 1$;
б) $\dfrac{5x + 8}{x} > 1$; г) $\dfrac{5x - 4}{x + 8} \geqslant 15$.

Глава III УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 7. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

17. Уравнение с двумя переменными и его график

Каждое из уравнений

$$2x + 3y = 15, \qquad x^2 = 4 - y^2, \qquad xy - 6 = 0, \qquad 5x^3 + y^2 = 9$$

является уравнением с двумя переменными.

Если в уравнение $5x^3 + y^2 = 9$ подставить вместо x число 1, а вместо y число 2, то получится верное равенство $5 \cdot 1^3 + 2^2 = 9$. Пара чисел (1; 2), в которой на первом месте указано значение переменной x, а на втором — значение переменной y, является решением уравнения $5x^3 + y^2 = 9$.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Уравнение с двумя переменными имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными уравнениями*.

Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной. Если левая часть уравнения с двумя переменными представляет собой многочлен стандартного вида, а правая — число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена. Для того чтобы выяснить, какова степень уравнения с двумя переменными, его заменяют равносильным уравнением, левая часть которого — многочлен стандартного вида, а правая — нуль. Например, уравнение $(x^3 + y)^2 = x^6 - 1$ равносильно уравнению $2x^3y + y^2 + 1 = 0$ и, значит, является уравнением четвертой степени.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство.

Вы знаете, что графиком линейного уравнения $ax + by = c$, в котором $a \neq 0$ или $b \neq 0$, является прямая. Вам известны также графики некоторых уравнений второй степени. Например, графиком уравнения $y = x^2$ является парабола, графиком уравнения $xy = 12$ — гипербола.

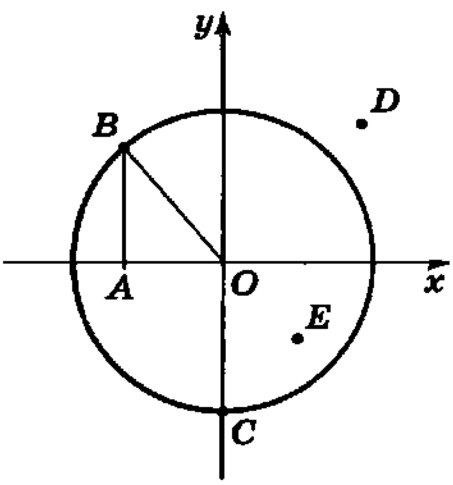


Рис. 60

Покажем, что графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где r — произвольное положительное число, является окружность радиуса r с центром в начале координат (рис. 60).

Пусть точка $B(x;\ y)$ — произвольная точка этой окружности, не принадлежащая ни одной из координатных осей. Тогда из прямоугольного треугольника AOB имеем $AO^2 + AB^2 = BO^2$. Так как $AO = |x|$, $AB = |y|$ и $BO = r$, то $|x|^2 + |y|^2 = r^2$, или, опустив знак модуля, получим

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

Легко убедиться, что если точка окружности находится на одной из координатных осей, то ее координаты также удовлетворяют уравнению (1). Например, подставив в уравнение (1) координаты точки $C(0;\ -r)$, получим верное равенство $0^2 + (-r)^2 = r^2$.

Можно доказать, что если точка не принадлежит окружности, как, например, точка D или точка E, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (1).

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ (1821–1894) — русский математик и механик, основатель знаменитой петербургской математической школы. Основные его труды относятся к теории чисел, математическому анализу, теории вероятностей и другим вопросам математики и смежных областей знаний.

Значит, равенство $x^2 + y^2 = r^2$ верно тогда и только тогда, когда точка с координатами x и y принадлежит окружности радиуса r с центром в начале координат. Отсюда следует, что графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ является окружность радиуса r с центром в начале координат.

Если каждую точку этой окружности перенести параллельно оси x на a единиц вправо при $a > 0$ или на $-a$ единиц влево при $a < 0$ и параллельно оси y на b единиц вверх при $b > 0$ или на $-b$ единиц вниз при $b < 0$, то получим окружность того же радиуса с центром в точке O (a; b) (рис. 61). Уравнение этой окружности примет вид

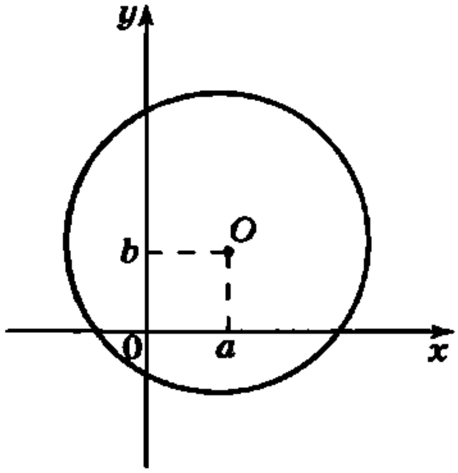


Рис. 61

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Графики уравнений с двумя переменными весьма разнообразны. Некоторые из них изображены на рисунке 62.

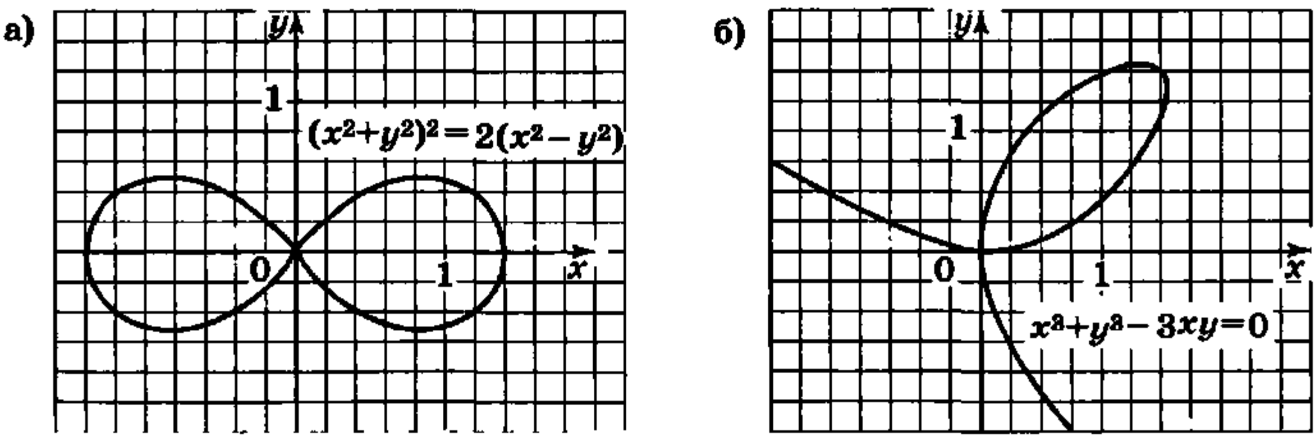


Рис. 62

Упражнения

395. Является ли пара чисел (−1; 3) решением уравнения:

а) $x^2 - y + 2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 10$;
б) $xy + y = 6$; г) $x^2 - y^2 + 8 = 0$?

396. Найдите три каких-нибудь решения уравнения:

а) $x - 2y = 8$; в) $x - xy = 12$;
б) $x + 0y = 10$; г) $(x + y)(y - 2) = 0$.

397. Определите степень уравнения:

а) $x + 4xy = 5$; в) $8x^6 - y^2 = 2x^4(4x^2 - y)$;

б) $x^5 + 8x^3y^3 = 1$; г) $(x - 2y)^2 - x^2 = 4y(y - x) + 5x$.

398. Докажите, что графиком уравнения $x^2 - y^2 = 0$ является пара прямых $y = x$ и $y = -x$.

399. Постройте график уравнения:

а) $3x + 0y = 12$; г) $y = 1{,}5$; ж) $|x| = 2$;

б) $0x + y = 1$; д) $(x - 2)(y - 3) = 0$; з) $|y| = 3$.

в) $x = 5$; е) $(x + 3)(y + 1) = 0$;

400. Составьте уравнение, графиком которого является пара прямых, изображенных на рисунке 63.

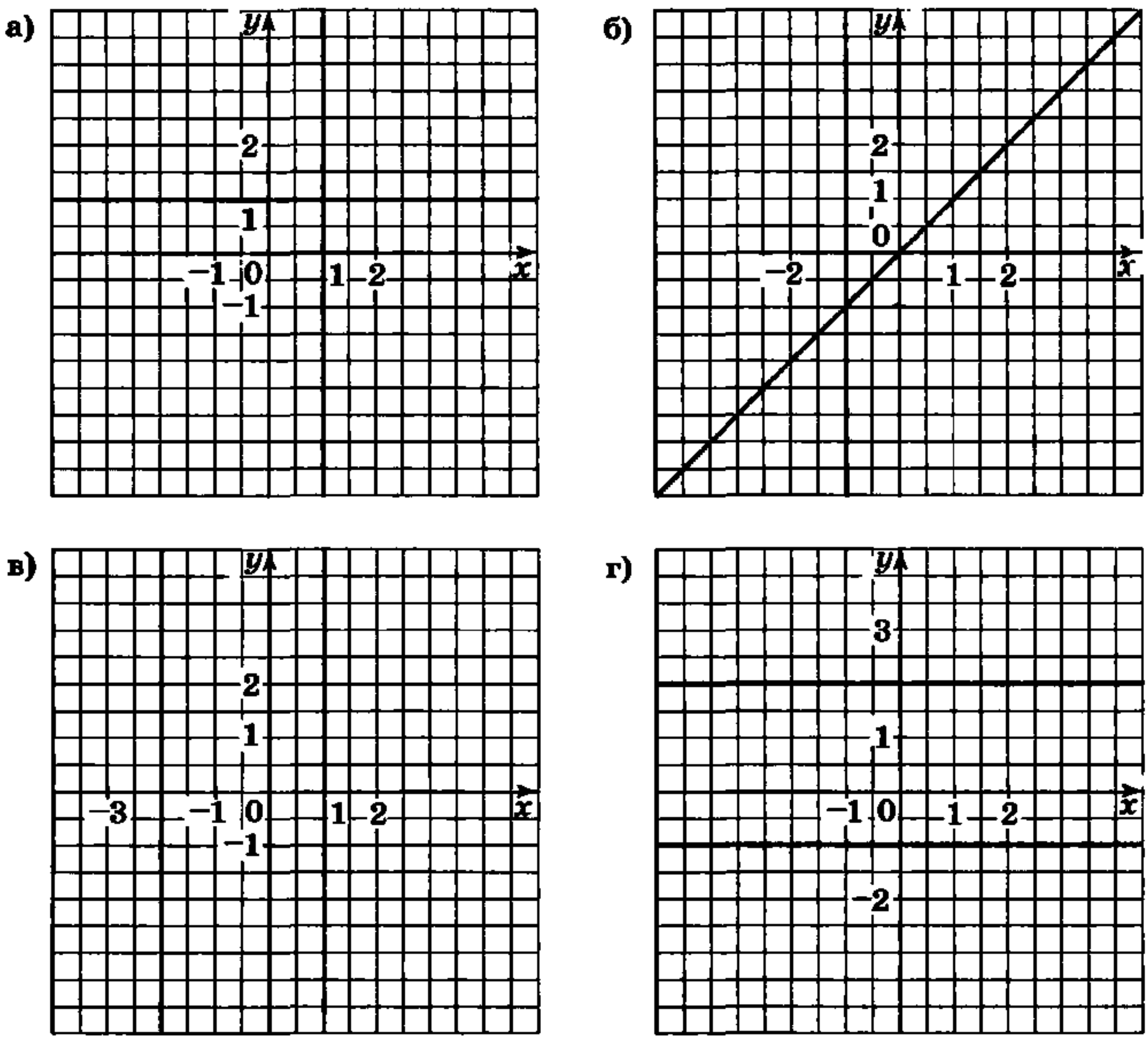


Рис. 63

401. Составьте уравнение с двумя переменными, график которого изображен на рисунке 64.

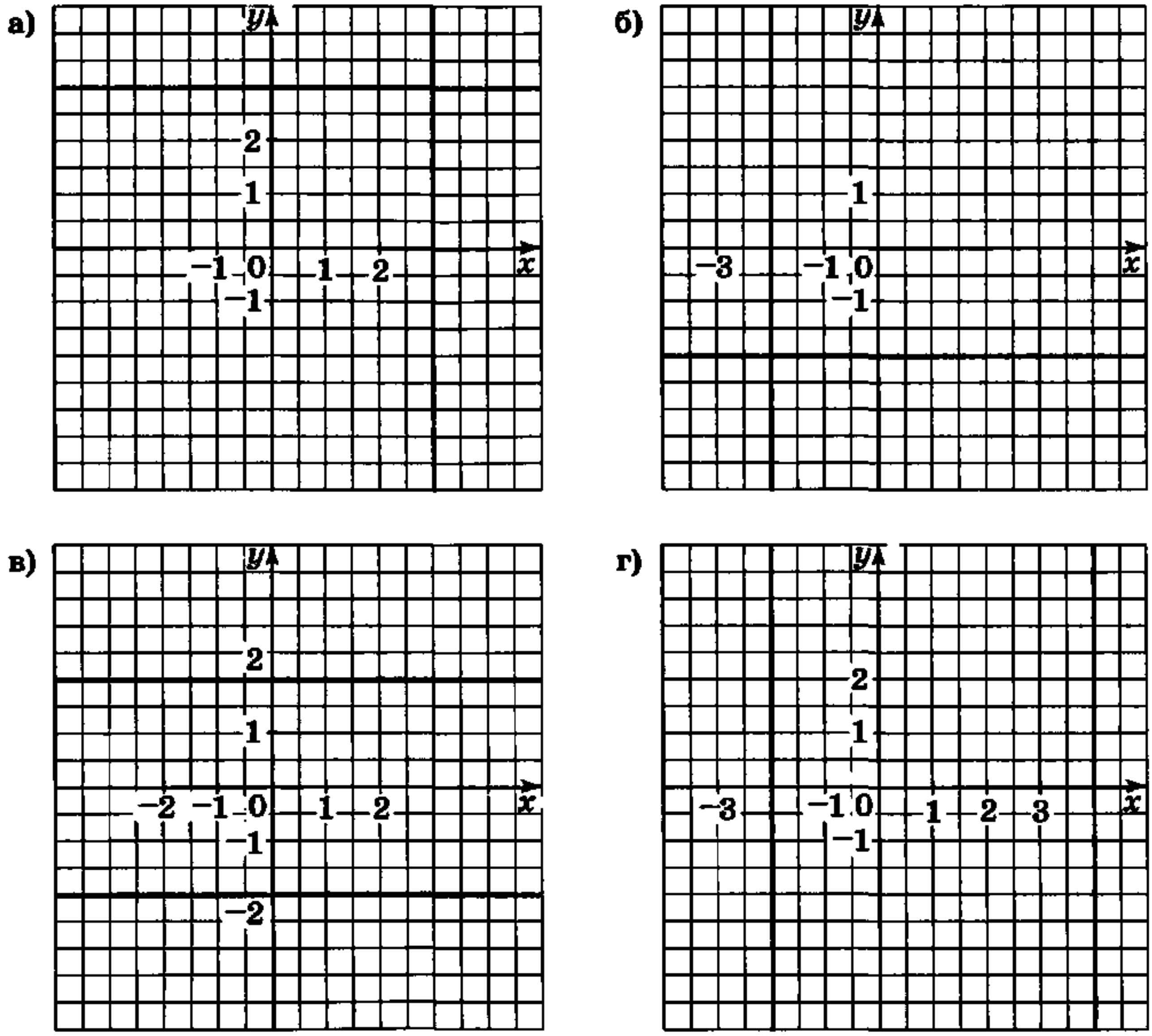


Рис. 64

402. Постройте график уравнения:

а) $xy = 6$; в) $x^2 + y^2 = 9$;

б) $y - 0{,}5x^2 = 1$; г) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

403. Какая фигура является графиком уравнения:

а) $(x - 5)(y + 6) = 0$; в) $x^2 + (y - 1)^2 = 0$;

б) $(x - 4)(x + 2) = 0$; г) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$?

404. Запишите уравнение окружности с центром в начале координат, зная, что она проходит через точку:

а) $A(-2; \sqrt{5})$; б) $B(3; 4)$; в) $C(8; 0)$.

405. Напишите уравнение окружности, зная, что ее центр находится в точке $K(2; -5)$ и она проходит через точку:
а) $A(-1; -1)$; б) $B(-3; 7)$; в) $C(1; -4)$.

406. Докажите, что графиком уравнения

$$x^2 + y^2 - 6(x - y) = 7$$

является окружность.

407. Что является графиком уравнения $\frac{(2x + y)^2}{4} - (x - 0,5y)^2 = 24$? Выберите верный ответ.

1. Окружность
2. Парабола
3. Гипербола
4. Пара прямых

408. При каких значениях m графиком уравнения

$$(x - 4)^2 + (y + m)^2 = 15$$

является окружность, центр которой расположен в четвертой координатной четверти?

409. При каких значениях r окружность $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = r^2$:
а) касается оси x; б) касается оси y?

410. Составьте уравнение окружности с центром в точке (3; 8), зная, что она касается:
а) оси x; б) оси y.

411. Найдите все целые решения уравнения:
а) $xy = 2$; б) $x^2 - y^2 = 3$.

412. Решите неравенство:
а) $25x^2 + 6x \leqslant 0$; г) $y^2 < 10y + 24$;
б) $x^2 - 169 > 0$; д) $15y^2 + 30 > 22y + 7$;
в) $4x^2 - 225 \leqslant 0$; е) $3y^2 - 7 \leqslant 26y + 70$.

413. Решите систему уравнений способом подстановки:
а) $\begin{cases} 11x - 9y = 37, \\ x = 1 + 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 16x - 4y = 5, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

414. Решите систему уравнений способом сложения:
а) $\begin{cases} 5x + 2y = 30, \\ 3x + 4y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 85, \\ 5x - 2y = 200. \end{cases}$

18. Графический способ решения систем уравнений

В курсе алгебры 7 класса мы рассматривали системы уравнений первой степени с двумя переменными. Теперь займемся решением систем, составленных из двух уравнений второй степени или из одного уравнения первой, а другого второй степени.

Напомним, что пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы уравнений с двумя переменными в верное равенство, называется *решением системы*. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Начнем с графического способа решения.

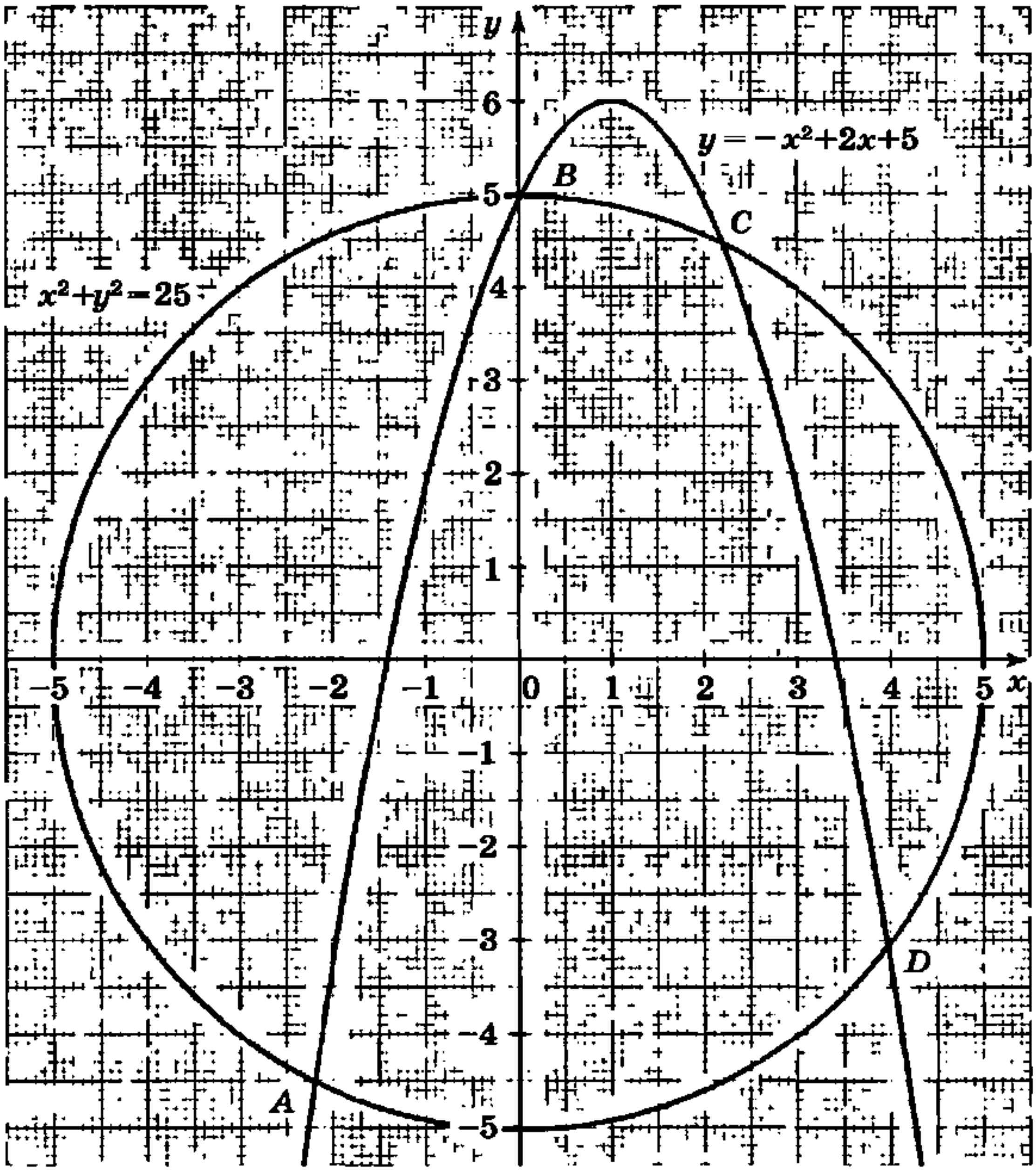


Рис. 65

Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -x^2 + 2x + 5. \end{cases}$$

Построим в одной системе координат графики уравнений

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ и } y = -x^2 + 2x + 5$$

(рис. 65). Координаты любой точки окружности являются решением уравнения $x^2 + y^2 = 25$, а координаты любой точки параболы — решением уравнения $y = -x^2 + 2x + 5$. Значит, координаты любой точки пересечения окружности и параболы удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, т. е. являются решением рассматриваемой системы. Используя рисунок, находим приближенные значения координат точек пересечения графиков: $A(-2{,}2; -4{,}5)$, $B(0; 5)$, $C(2{,}2; 4{,}5)$, $D(4; -3)$. Следовательно, система уравнений имеет четыре решения:

$$x_1 \approx -2{,}2,\ y_1 \approx -4{,}5; \qquad x_2 \approx 0,\ y_2 \approx 5;$$
$$x_3 \approx 2{,}2,\ y_3 \approx 4{,}5; \qquad x_4 \approx 4,\ y_4 \approx -3.$$

Подставив найденные значения x и y в уравнения системы, можно убедиться, что второе и четвертое решения являются точными, а первое и третье — приближенными.

Упражнения

415. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 6x + 5y = -4 \end{cases}$$

пара чисел: а) $(-2; 1)$; б) $(1; -2)$?

416. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

417. Покажите с помощью графиков, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$$

имеет четыре решения, и найдите их.

418. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 10. \end{cases}$$

419. С помощью графиков решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 6, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

420. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y + 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y + 3 = 0. \end{cases}$

421. Изобразив схематически графики уравнений, выясните, имеет ли решения система уравнений и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ xy = -12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2 + 8, \\ y = -x^2 + 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x-10)^2 + y^2 = 16. \end{cases}$

422. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ y = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x + y = 6. \end{cases}$

423. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

424. Составьте уравнение, графиком которого является:

а) пара прямых $y = x + 1$ и $y = x - 1$;

б) парабола $y = x^2$ и прямая $y = -2$.

425. При каком значении b пара чисел (18; 3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 4b, \\ 2x + y = 39? \end{cases}$$

426. При каких значениях a решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = a + 1, \\ 3x - y = a - 1 \end{cases}$$

является пара положительных чисел?

427. Докажите, что при $a > -1$ выражение $\left(\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}\right) : \frac{4a}{5a-5}$ принимает положительные значения при всех допустимых значениях a.

428. Из деревни в город, находящийся на расстоянии 72 км, отправился велосипедист. Спустя 15 мин навстречу ему из города выехал другой велосипедист, проезжающий в час на 2 км больше первого. Найдите, с какой скоростью ехал каждый из них, если известно, что они встретились в середине пути.

19. Решение систем уравнений второй степени

Рассмотрим сначала системы уравнений с двумя переменными, составленные из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени. Такую систему всегда можно решить способом подстановки. Для этого поступают следующим образом:

1) выражают из уравнения первой степени одну переменную через другую;
2) подставляют полученное выражение в уравнение второй степени, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующие значения второй переменной.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

▶ Выразим из второго уравнения переменную x через y:

$$x = 1 - 2y.$$

Подставим в первое уравнение вместо x выражение $1 - 2y$, получим уравнение с переменной y:

$$(1 - 2y)^2 - 3(1 - 2y)y - 2y^2 = 2.$$

После упрощения получим равносильное уравнение

$$8y^2 - 7y - 1 = 0.$$

Решив его, найдем, что $y_1 = -\frac{1}{8}$, $y_2 = 1$.

Соответствующие значения x можно найти, подставив найденные значения y в одно из уравнений системы, например во второе уравнение. Удобнее, однако, воспользоваться формулой $x = 1 - 2y$.

Подставив в формулу $x=1-2y$ значение $y_1=-\frac{1}{8}$, получим $x_1=1\frac{1}{4}$.
Подставив в формулу $x=1-2y$ значение $y_2=1$, получим $x_2=-1$.
Итак, система имеет два решения:

$$x_1 = 1\frac{1}{4},\ y_1 = -\frac{1}{8} \text{ и } x_2 = -1,\ y_2 = 1.$$

Ответ можно записать также в виде пар: $\left(1\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, $(-1; 1)$. ◁

Если система состоит из двух уравнений второй степени с двумя переменными, то найти ее решения обычно бывает трудно. В отдельных случаях такие системы удается решить, используя способ подстановки или способ сложения.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

▶ Воспользовавшись тем, что $x \neq 0$, выразим из второго уравнения переменную y через x:

$$y = \frac{6}{x}.$$

Подставим в первое уравнение вместо y выражение $\frac{6}{x}$. Получим уравнение

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5.$$

Решив его, найдем, что

$$x_1 = -3,\ x_2 = 3.$$

По формуле $y = \frac{6}{x}$ находим соответствующие значения y:

$$y_1 = -2,\ y_2 = 2.$$

Значит, система имеет два решения:

$$x_1 = -3,\ y_1 = -2 \text{ и } x_2 = 3,\ y_2 = 2.$$

Ответ: $(-3; -2)$, $(3; 2)$. ◁

Упражнения

429. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x = y + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy + x = -4, \\ x - y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - 2y = 26; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 9, \\ y^2 + x = 29. \end{cases}$

430. Решите систему уравнений, используя способ подстановки:

а) $\begin{cases} x = 3 - y, \\ y^2 - x = 39; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y = 14, \\ y - x = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 1 + x, \\ x + y^2 = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + xy = 6. \end{cases}$

431. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 2{,}5, \\ xy = 1{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 17. \end{cases}$

432. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = -20; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 0{,}8, \\ xy = 2{,}4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = -3. \end{cases}$

433. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ 5x^2 - y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y^2 = 2, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 52, \\ y - x = 14; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 32, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$

434. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2xy - y = 7, \\ x - 5y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - xy = 33, \\ 4x - y = 17; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + 4y = 10, \\ x - 2y = -5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 2y = 18, \\ 3x = 2y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 5xy + y^2 = 16. \end{cases}$

435. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 4y = 5(x - y), \\ x^2 - y^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u - v = 6(u + v) \\ u^2 - v^2 = 6. \end{cases}$

436. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6(y - x) - 50 = y, \\ y - xy = 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} p + 5t = 2(p + t), \\ pt - t = 10. \end{cases}$

437. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x - 2)(y + 3) = 160, \\ y - x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 1)(y + 10) = 9, \\ x - y = 11. \end{cases}$

438. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ xy = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ y^2 - 6y + 5 = 0. \end{cases}$

439. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0{,}5x^2 - 2, \\ y - x = 2 \end{cases}$$

сначала графическим способом, а затем аналитическим.

440. Решите систему уравнений графически и аналитически:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

441. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y = 9, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$

442. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u + 2v = 4, \\ u^2 + uv - v = -5. \end{cases}$

443. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -2{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$

444. Не выполняя построения:

а) определите, пересекает ли парабола $y = x^2 - 8x + 16$ прямую $2x - 3y = 0$ и если да, то в каких точках;

б) найдите, в каких точках пересекаются окружность $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 65$ и прямая $3x - y + 6 = 0$.

445. Докажите, что прямая $x - y = 4$ имеет одну общую точку с параболой $y = x^2 - 5x + 5$, и найдите координаты этой точки.

446. Докажите, что парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ и прямая $2x + y + 3 = 0$ не пересекаются.

447. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ xy = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 34, \\ xy = 20. \end{cases}$

448. Решите систему уравнений, используя способ сложения:

а) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14, \\ x^2 + 2y^2 = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy + x = 56, \\ xy + y = 54. \end{cases}$

449. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

а) окружности $x^2 + y^2 = 36$ и параболы $y = x^2 + 6$;

б) окружностей $x^2 + y^2 = 16$ и $(x - 2)^2 + y^2 = 36$.

450. При каких значениях k парабола $y = x^2 + 1$ и прямая $y = kx$ имеют только одну общую точку?

451. Окружность $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$ и прямая $y = kx$ имеют общую точку $M(1;\ 2)$. Найдите координаты другой общей точки, если такая точка существует.

452. Построив схематически графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 15x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 10, \\ y = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = x^2 + 3. \end{cases}$

453. Решите неравенство:

а) $0{,}2x(x - 1) - x(0{,}2x + 0{,}5) < 0{,}6x - 4$;

б) $1{,}2x(3 - x) + 0{,}4x(3x - 1) < x + 1{,}1$.

454. При каких значениях x:

а) трехчлен $-x^2 - 2x + 168$ принимает положительные значения;

б) трехчлен $15x^2 + x - 2$ принимает отрицательные значения;

в) дробь $\dfrac{x + 14}{3 - 2x}$ принимает отрицательные значения;

г) дробь $\dfrac{6 - 5x}{x + 25}$ принимает положительные значения?

20. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

Задача. Периметр прямоугольника равен 80 см. Если основание прямоугольника увеличить на 8 см, а высоту — на 2 см, то площадь прямоугольника увеличится в полтора раза. Каковы стороны прямоугольника?

▶ Пусть основание прямоугольника равно x см, а высота равна y см. Так как периметр прямоугольника равен 80 см, то

$$2x + 2y = 80.$$

Площадь прямоугольника равна xy см^2. После увеличения сторон основание прямоугольника будет равно $(x + 8)$ см, высота будет равна $(y + 2)$ см, а площадь будет равна $(x + 8)(y + 2)$ см^2. По условию задачи площадь прямоугольника увеличится в полтора раза, т. е.

$$(x + 8)(y + 2) = 1{,}5xy.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80, \\ (x + 8)(y + 2) = 1{,}5xy. \end{cases}$$

Решив ее, найдем, что

$$x_1 = 28,\ y_1 = 12 \text{ или } x_2 = 24,\ y_2 = 16.$$

Задача имеет два решения. Стороны прямоугольника равны 28 см и 12 см или 24 см и 16 см. ◁

Упражнения

455. Сумма двух чисел равна 12, а их произведение равно 35. Найдите эти числа.

456. Одно число на 7 больше другого, а их произведение равно −12. Найдите эти числа.

457. Диагональ прямоугольника равна 10 см, а его периметр равен 28 см. Найдите стороны прямоугольника.

458. Одна из сторон прямоугольника на 14 см больше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его диагональ равна 26 см.

459. Прямоугольный участок земли площадью 2400 м^2 обнесен изгородью, длина которой равна 200 м. Найдите длину и ширину этого участка.

460. Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а его гипотенуза равна 37 см. Найдите площадь этого треугольника.

461. Из некоторого пункта вышли одновременно два отряда. Один направился на север, а другой — на восток. Спустя 4 ч расстояние между отрядами было равно 24 км, причем первый отряд прошел на 4,8 км больше, чем второй. С какой скоростью шел каждый отряд?

462. От вершины прямого угла по его сторонам начинают одновременно двигаться два тела. Через 15 с расстояние между ними стало равно 3 м. С какой скоростью двигалось каждое тело, если известно, что первое прошло за 6 с такое же расстояние, какое второе прошло за 8 с?

463. На каждой из сторон прямоугольника построен квадрат. Сумма площадей квадратов равна 122 см^2. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что его площадь равна 30 см^2.

464. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а его гипотенуза равна 10 см. Каковы катеты треугольника?

465. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см. Если один из его катетов увеличить на 4 см, то гипотенуза увеличится на 2 см. Найдите катеты треугольника.

466. Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объем земляных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объем работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объема земляных работ?

467. Один комбайнер может убрать урожай пшеницы с участка на 24 ч быстрее, чем другой. При совместной же работе они закончат уборку урожая за 35 ч. Сколько времени потребуется каждому комбайнеру, чтобы одному убрать урожай?

468. Одна из дорожных бригад может заасфальтировать некоторый участок дороги на 4 ч быстрее, чем другая. За сколько часов может заасфальтировать участок каждая бригада, если известно, что за 24 ч совместной работы они заасфальтировали 5 таких участков?

469. Положив в банк некоторую сумму денег, вкладчик мог получить через год на 400 р. больше. Оставив эти деньги в банке еще на год, он снял со своего счета всю сумму, которая составила 5832 р. Какая сумма денег была положена в банк и сколько процентов годовых начислял банк?

470. Груз массой 30 кг производит давление на опору. Если массу груза уменьшить на 2 кг, а площадь опоры уменьшить на 1 дм^2, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Найдите площадь опоры.

471. Рационализаторы цеха внедрили в производство усовершенствованный тип детали. Определите массу детали нового и старого типов, если известно, что деталь нового типа на 0,2 кг легче детали старого типа, причем из 22 кг металла стали делать деталей нового типа на две больше, чем делали деталей старого типа из 24 кг металла.

472. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 40 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Через 4 ч им осталось пройти до встречи 4 км. Если бы из пункта A пешеход вышел на 1 ч раньше, то встреча произошла бы на середине пути. С какой скоростью шел каждый пешеход?

473. Из пункта M в пункт N, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно два туриста. Один из них прибыл в пункт N на 54 мин позже, чем другой. Найдите скорость каждого туриста, если известно, что скорость одного из них на 1 км/ч меньше, чем скорость другого.

474. Из населенных пунктов M и N, удаленных друг от друга на 50 км, выехали одновременно два мотоциклиста и встретились через 30 мин. Найдите скорость каждого мотоциклиста, если известно, что один из них прибыл в пункт M на 25 мин раньше, чем другой в пункт N.

475. После того как смешали 12 г одной жидкости с 14 г другой жидкости большей плотности, получили смесь, плотность которой равна 1,3 г/см^3. Какова плотность каждой жидкости, если известно, что плотность одной из них на 0,2 г/см^3 больше плотности другой?

476. Из куска олова массой 356 г и куска меди массой 438 г сделали сплав. Известно, что плотность олова на 1,6 г/см^3 больше плотности меди. Найдите объем каждого куска металла, если объем куска олова на 20 см^3 меньше объема куска меди.

477. К раствору, содержащему 50 г соли, добавили 150 г воды. После этого его концентрация уменьшилась на 7,5%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

П

478. В каких координатных четвертях нет ни одной точки графика функции:

а) $y = -3{,}5x^2 - 2{,}6$; б) $y = x^2 - 12x + 34$?

П

479. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + y + 4 = 0, \\ x^2 - y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + 3x = 2, \\ x^2 - xy = 3{,}36. \end{cases}$

480. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

а) параболы $y = x^2 - 3x + 3$ и прямой $2x - y - 1 = 0$;

б) окружности $x^2 + y^2 = 100$ и прямой $x + y = 14$.

481. Решите неравенство:

а) $x^2 - 6x < 0$; б) $8x + x^2 \geqslant 0$; в) $x^2 \leqslant 4$; г) $x^2 > 6$.

Контрольные вопросы

1 Что называется решением уравнения с двумя переменными?

2 Что называется графиком уравнения с двумя переменными?

3 Объясните на примере, как решают систему двух уравнений с двумя переменными, составленную из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени.

§ 8. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

21. Неравенства с двумя переменными

Рассмотрим неравенство $2x^2 - y < 6$. При $x = 2$, $y = 5$ это неравенство обращается в верное числовое неравенство $2 \cdot 2^2 - 5 < 6$. Говорят, что пара (2; 5) является решением этого неравенства.

Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений этих переменных, обращающая данное неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим, как изображается на координатной плоскости множество решений неравенства с двумя переменными.

Сначала выясним, как найти множество решений линейного неравенства с двумя переменными, т. е. неравенства вида $ax + by < c$ или $ax + by > c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа, причем хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля.

Рассмотрим, например, неравенство $x + 2y > 4$ и заменим его равносильным неравенством $y > -0{,}5x + 2$. Выберем произвольно значение x, например $x = 2$, и найдем соответствующее ему значение выражения $-0{,}5x + 2$. Получим $-0{,}5 \cdot 2 + 2 = 1$. Пара чисел $(2; 1)$ является решением уравнения $y = -0{,}5x + 2$, так как ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Любые пары чисел вида $(2; y)$, где $y > 1$, например пары $(2; 1{,}8)$, $(2; 4)$, $(2; 100)$ и т. д., являются решениями рассматриваемого неравенства. Мы нашли лишь некоторые решения неравенства $y > -0{,}5x + 2$. Чтобы найти все решения данного неравенства, будем рассуждать аналогично.

Пусть x_0 — произвольно выбранное значение x. Вычислим соответствующее ему значение выражения $-0{,}5x + 2$. Получим $-0{,}5 \cdot x_0 + 2$. Пара чисел $(x_0; y_0)$, где $y_0 = -0{,}5x_0 + 2$, является решением уравнения $y = -0{,}5x + 2$. Тогда пары чисел $(x_0; y)$, где $y > -0{,}5x_0 + 2$ (т. е. $y > y_0$), и только эти пары, образуют множество решений данного неравенства.

Теперь выясним, что представляет собой множество точек, координаты которых являются решениями неравенства $x + 2y > 4$. Для этого построим прямую $y = -0{,}5x + 2$, отметим на ней произвольную точку $M(x_0; y_0)$ и проведем через нее прямую, перпендикулярную оси x (рис. 66). Координаты точки M удовлетворяют уравнению $y = -0{,}5x + 2$ (так как точка M принадлежит этой прямой), а координаты любой точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, т. е. точки, расположенной выше точки M, удовлетворяют неравенству $y > -0{,}5x + 2$.

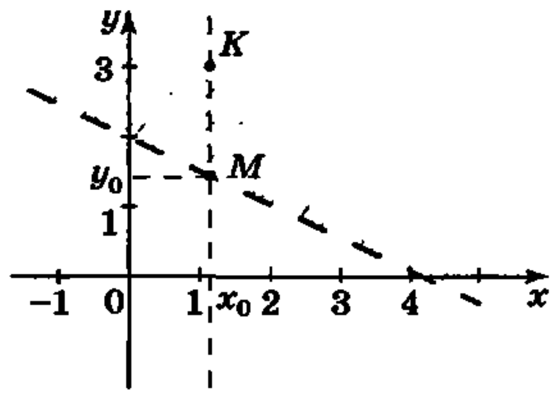


Рис. 66

Значит, неравенством $x + 2y > 4$ задается множество точек координатной плоскости, расположенных выше прямой $y = -0{,}5x + 2$, т. е. открытая полуплоскость (полуплоскость без граничной прямой) (см. рис. 66). Чтобы показать, что прямая $y = -0{,}5x + 2$ не принадлежит полуплоскости, она на рисунке изображена штриховой линией.

Можно сделать такой вывод. Прямая $x + 2y = 4$ разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на две области: область, расположенную выше данной прямой, и область, расположенную ниже данной прямой. Координаты точек первой области удовлетворяют неравенству $x + 2y > 4$, а координаты точек второй области удовлетворяют неравенству $x + 2y < 4$.

Мы выяснили на частном примере, что представляет собой множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $ax + by < c$ и $ax + by > c$, в случае, когда $b \neq 0$.

Рассмотрим примеры неравенств с двумя переменными второй степени.

Пример 1. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $y \geqslant (x-2)^2$.

▶ Построим график уравнения $y=(x-2)^2$. Отметим на параболе $y=(x-2)^2$ произвольную точку $M(x_0;\ y_0)$ и проведем через эту точку перпендикуляр к оси x (рис. 67). Координаты точки M удовлетворяют уравнению $y=(x-2)^2$, а координаты точки $K(x_0;\ y)$, где $y > y_0$, удовлетворяют неравенству $y > (x-2)^2$. Значит, решениями данного неравенства являются координаты точек, принадлежащих параболе $y=(x-2)^2$, и координаты точек, расположенных выше ее. Множество решений этого неравенства изображено на рисунке 67. ◁

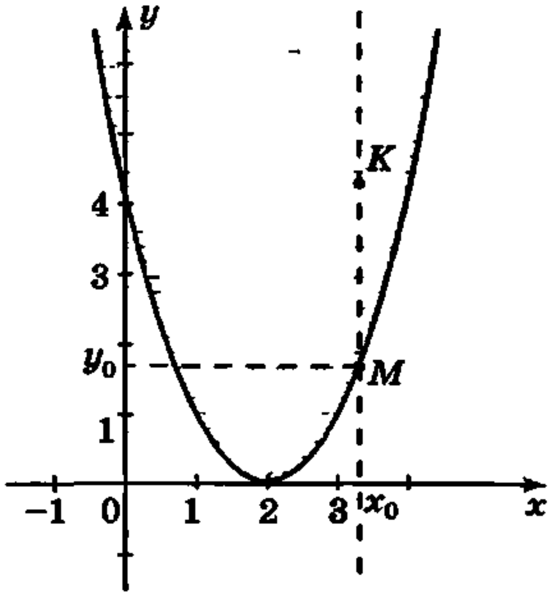


Рис. 67

Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $x^2+y^2 \leqslant 16$.

▶ Неравенству $x^2+y^2 \leqslant 16$ удовлетворяют те и только те пары чисел (значений x и y), сумма квадратов которых не превосходит 16. Графиком уравнения $x^2+y^2=16$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Эта окружность разбивает координатную плоскость на две области: множество точек, расположенных внутри круга, и множество точек, расположенных вне круга. Первая область (рис. 68) вместе с окружностью является множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2+y^2 \leqslant 16$, а координаты точек второй области удовлетворяют неравенству $x^2+y^2 > 16$. ◁

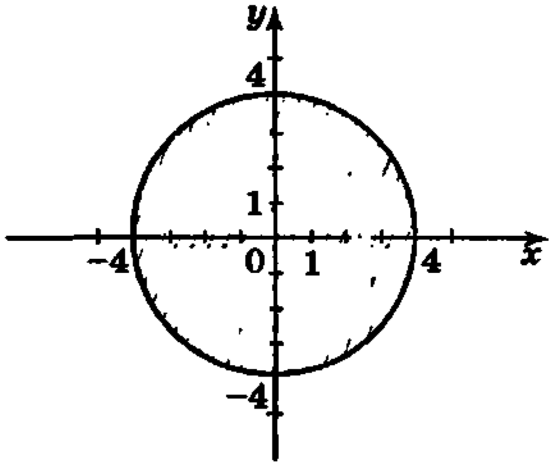


Рис. 68

Пример 3. Выясним, какое множество точек задается неравенством $xy > 6$.

▶ Графиком уравнения $xy=6$ является гипербола. Этот график разбивает координатную плоскость на три области A, B и C

(рис. 69). Область A расположена выше ветви гиперболы, лежащей в первой координатной четверти, область B — между ветвями гиперболы, область C — ниже ветви гиперболы, лежащей в третьей координатной четверти.

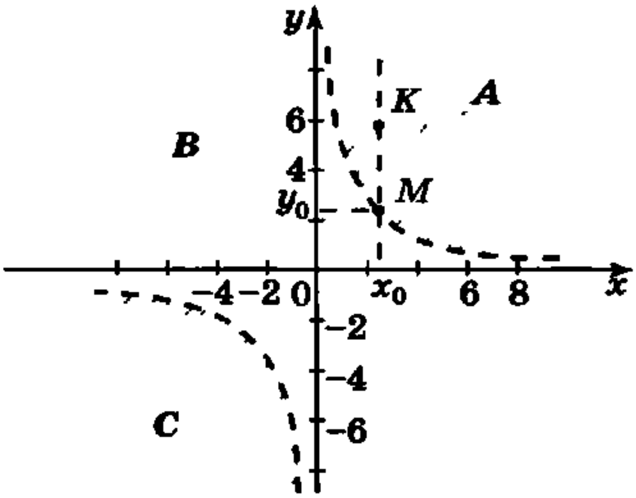


Рис. 69

Отметим на ветви гиперболы, расположенной в первой координатной четверти, точку $M(x_0; y_0)$. Координаты точки M удовлетворяют уравнению $xy = 6$, а координаты точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, удовлетворяют неравенству $xy > 6$, так как произведение координат каждой точки области A больше 6. Значит, координаты точек, расположенных в области A, удовлетворяют неравенству $xy > 6$.

Если точка принадлежит области C, то произведение координат каждой такой точки также больше 6 (обе координаты этой точки — отрицательные числа). Значит, координаты точек области C также удовлетворяют неравенству $xy > 6$.

Аналогично можно доказать, что координаты каждой точки, расположенной в области B, удовлетворяют неравенству $xy < 6$, т. е. они не являются решениями неравенства $xy > 6$.

Отсюда следует, что множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy > 6$, является объединение областей A и C (см. рис. 69). ◁

Упражнения

482. Является ли пара чисел (−2; 3) решением неравенства:

а) $2x - 3y + 16 > 0$;

б) $x^2 + 3xy - y^2 < 20$;

в) $(x+3)^2 + (y-4)^2 < 2$?

483. Найдите два каких-нибудь решения неравенства:

а) $y > 2x - 3$; в) $y \leqslant x^2 - 1$;

б) $y < 3x - 5$; г) $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

484. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством:

а) $y \geqslant x$; б) $y \leqslant x - 1$; в) $y > \frac{1}{2}x - 1$; г) $y < \frac{1}{3}x - 3$.

485. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством $ax + by > c$, если:

а) $a = 0,\ b = 1,\ c = 3$; б) $a = 1,\ b = 0,\ c = 3$.

486. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством:

а) $x \geqslant 3$; б) $y < -1$; в) $1 < x < 4$; г) $-3 \leqslant y \leqslant 3$.

487. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \leqslant x^2 - 4$; в) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;

б) $y \geqslant (x-2)^2 - 1$; г) $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$.

488. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $xy > 12$; б) $xy < 4$.

489. Какое множество точек задается неравенством:

а) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \leqslant 0$; б) $x^2 - 4x - y + 5 \geqslant 0$?

490. Задайте неравенством с двумя переменными:

а) круг с центром в точке (2; 0) и радиусом, равным 3;

б) множество точек, расположенных вне круга с центром в точке (0; 4) и радиусом, равным 2.

491. Опишите неравенством множество точек координатной плоскости, расположенных:

а) выше параболы $y = x^2 - 9$;

б) ниже параболы $y = (x+2)^2$.

492. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $xy \geqslant 0$; б) $xy < 0$.

493. Постройте график уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $\dfrac{x^2 - y}{x} = 0$.

494. Представьте в виде рациональной дроби:

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{1-x}{x^2+3x+2}.$$

495. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - 2 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

22. Системы неравенств с двумя переменными

Рассмотрим систему неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x \leqslant y^2, \\ y < x + 2. \end{cases}$$

Пара чисел (1; 2) значений переменных x и y является решением как первого, так и второго неравенства системы, т. е. является общим решением неравенств этой системы. Такую пару чисел называют *решением системы неравенств с двумя переменными.* Множеством решений системы неравенств с двумя переменными является пересечение множеств решений входящих в нее неравенств. На координатной плоскости множество решений системы неравенств изображается множеством точек, представляющих собой общую часть множеств, задаваемых неравенствами, входящими в систему.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Выясним, какое множество точек задает на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 1. \end{cases}$$

▶ Первое неравенство системы задает на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиусом, равным 2. На рисунке 70 это множество точек показано горизонтальной штриховкой. Второе неравенство задает полуплоскость, которая показана на рисунке 70 наклонной штриховкой. Множество решений системы изображено двойной штриховкой. Итак, множеством точек, которое задает система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 1, \end{cases}$$

является сегмент, показанный на рисунке 70 двойной штриховкой. ◁

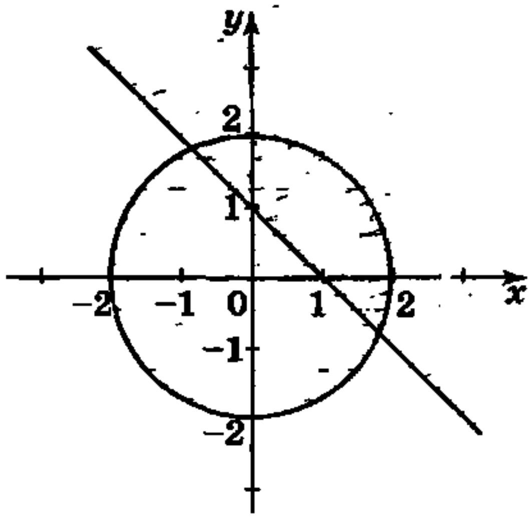


Рис. 70

Остановимся подробнее на примерах систем, состоящих из двух линейных неравенств.

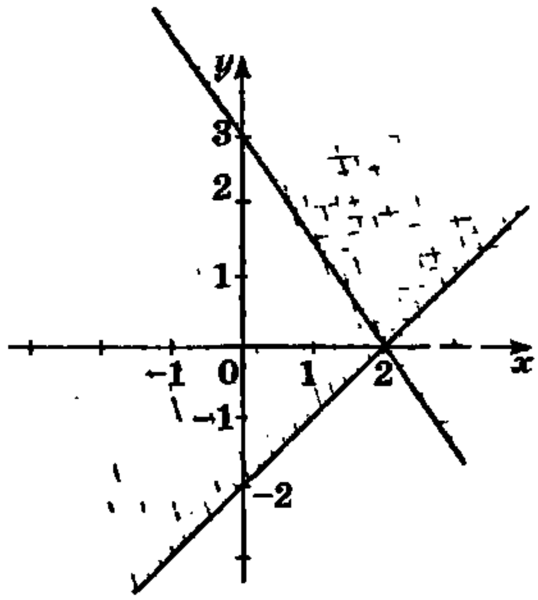


Рис. 71

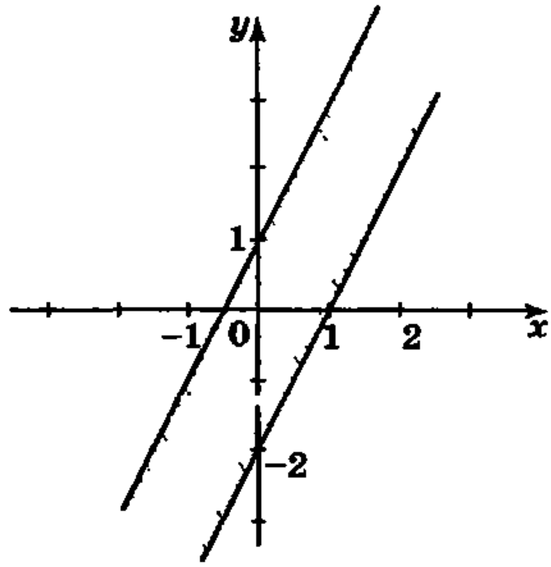


Рис. 72

Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} y \geqslant x - 2, \\ y \geqslant -1{,}5x + 3. \end{cases}$$

▶ Множество точек, задаваемое первым неравенством, — полуплоскость, расположенная выше прямой $y = x - 2$. Множество точек, задаваемое вторым неравенством, — полуплоскость, расположенная выше прямой $y = -1{,}5x + 3$. Пересечение этих множеств представляет собой угол, отмеченный на координатной плоскости двойной штриховкой (рис. 71). ◁

Пример 3. Выясним, какое множество точек задает на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 2x + 1, \\ y \geqslant 2x - 2. \end{cases}$$

▶ Множество точек, задаваемое первым неравенством, — полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = 2x + 1$. Множество точек, задаваемое вторым неравенством, — полуплоскость, расположенная выше прямой $y = 2x - 2$. Так как угловые коэффициенты прямых $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 2$ равны, то прямые параллельны. Следовательно, пересечением указанных полуплоскостей является полоса, изображенная на рисунке 72. ◁

Упражнения

496. Является ли решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2y > 7, \\ 3x + y > 3 \end{cases}$$

пара чисел: а) (4; 2); б) (−5; 1); в) (−2; −1); г) (6; −5)?

497. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant x - 3, \\ y \leqslant -x + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2x + y < -1, \\ x - y > 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y < 4, \\ x + y < 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ x - y < 2. \end{cases}$

498. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ y \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -1, \\ y > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

499. Задайте системой неравенств:
а) первую координатную четверть (включая оси координат);
б) третью координатную четверть (включая оси координат).

500. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ (x-3)^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x - y \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \geqslant 1, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 9. \end{cases}$

501. Какую фигуру задает множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 5, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1? \end{cases}$

Найдите площадь каждой фигуры.

502. Задайте системой неравенств:
а) треугольник, изображенный на рисунке 73, *а*;
б) кольцо, изображенное на рисунке 73, *б*.

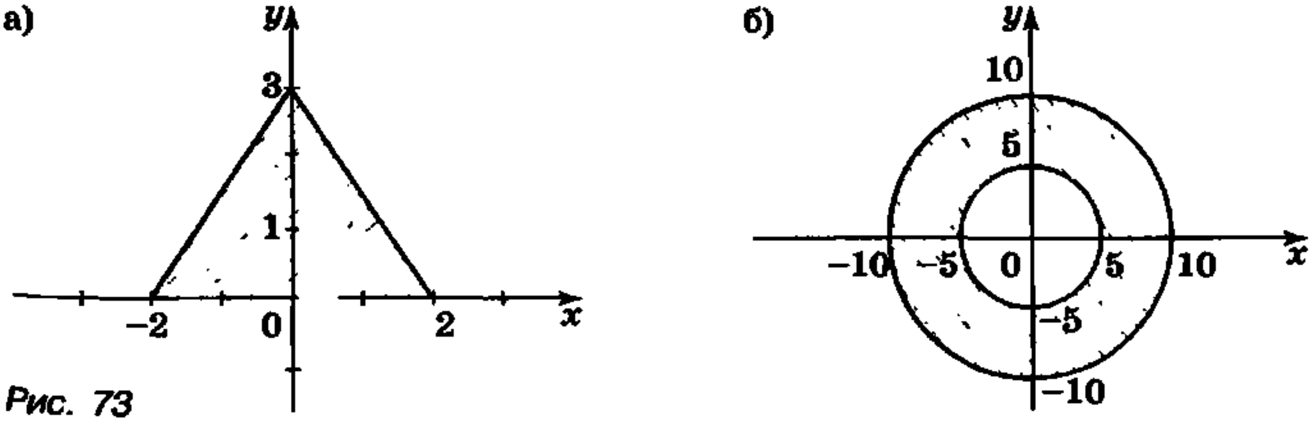


Рис. 73

503. Одна из сторон острого угла проходит через точки (0; 0) и (3; 3), а другая — через точки (0; −2) и (3; −2). Задайте этот угол системой неравенств.

504. Решите уравнение:

а) $(x+2)^2+9(x+2)+20=0$; б) $(x-5)^2+2(x-5)-63=0$.

505. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{15-x}$.

506. Докажите, что верно неравенство

$$6x(x+8)-(5x-27)(x+17)>0.$$

Контрольные вопросы

1 Что называется решением неравенства с двумя переменными?

2 Какую пару чисел называют решением системы неравенств с двумя переменными?

3 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 36, \\ x+y \leqslant 6. \end{cases}$$

Для тех, кто хочет знать больше

23. Некоторые приемы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными

Вы познакомились со способом решения систем уравнений с двумя переменными, в которых одно уравнение первой степени, а другое — второй степени. Такие системы решаются способом подстановки.

Покажем на примерах некоторые приемы решения систем уравнений, в которых оба уравнения второй степени.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-9y^2-x+3y=0, \\ x^2-xy+y=7. \end{cases}$$

▶ В этой системе многочлен, записанный в левой части первого уравнения, можно разложить на линейные множители:

$$x^2 - 9y^2 - x + 3y = (x - 3y)(x + 3y) - (x - 3y) =$$
$$= (x - 3y)(x + 3y - 1).$$

Система уравнений перепишется в виде

$$\begin{cases} (x - 3y)(x + 3y - 1) = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases}$$

Произведение $(x - 3y)(x + 3y - 1)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x - 3y = 0$ или $x + 3y - 1 = 0$.
Решениями исходной системы являются те пары значений переменных x и y, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - xy + y = 7, \end{cases} \qquad (1)$$

или системе уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases} \qquad (2)$$

Поэтому множеством решений исходной системы является объединение множеств решений систем (1) и (2). Говорят, что данная система равносильна *совокупности систем уравнений* (1) и (2).
Решим первую систему. Выполнив подстановку $x = 3y$, получим квадратное уравнение $6y^2 + y - 7 = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = -1\frac{1}{6}$, $y_2 = 1$. Подставив их значения в первое уравнение, найдем, что $x_1 = -3\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$. Значит, система (1) имеет решения $\left(-3\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$ и (3; 1).
Решим систему (2). Выполнив подстановку $x = -3y + 1$, получим квадратное уравнение $(-3y + 1)^2 - y(-3y + 1) + y - 7 = 0$, которое после упрощения примет вид $2y^2 - y - 1 = 0$. Отсюда $y_3 = -\frac{1}{2}$, $y_4 = 1$. Подставив эти значения в первое уравнение системы (2), найдем, что $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = -2$.
Значит, система (2) имеет решения (2,5; −0,5), (−2; 1).
Решения исходной системы: $\left(-3\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$, (3; 1), (2,5; −0,5), (−2; 1). ◁

Таким образом, мы решили исходную систему уравнений, заменив ее совокупностью двух систем.

5 – Ю. Н. Макарычев, 9 кл.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y = xy, \\ x^2 - y = 3xy. \end{cases}$$

▶ Воспользуемся способом сложения. Первое уравнение оставим без изменения, а второе умножим на 3. Затем сложим почленно левые и правые части уравнений. Получим уравнение $5x^2 = 10xy$, которое можно представить в виде $x(x - 2y) = 0$. Значит, исходную систему можно заменить равносильной ей совокупностью двух систем

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 - y = 3xy \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y = 3xy. \end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение: (0; 0), вторая система имеет два решения: (0; 0) и (–1; –0,5).
Решения исходной системы: (0; 0), (–1; –0,5). ◁

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

▶ Левая часть первого уравнения системы — однородный многочлен, т. е. многочлен, каждый член которого имеет одну и ту же степень.

Разделим обе части первого уравнения на y^2, предполагая, что $y \neq 0$. Получим квадратное относительно $\frac{x}{y}$ уравнение $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 1 = 0$. При этом мы потеряем решение (0; 0) первого уравнения системы. Но так как пара (0; 0) не является решением второго уравнения, то система

$$\begin{cases} 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 1 = 0, \\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

является равносильной исходной системе.

Обозначив $\frac{x}{y}$ буквой t, получим уравнение $3t^2 + 4t + 1 = 0$. Решив его, найдем, что $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$, т. е. $\frac{x}{y} = -1$ или $\frac{x}{y} = -\frac{1}{3}$. Отсюда $x = -y$ или $x = -\frac{1}{3}y$.

Таким образом, решение исходной системы можно свести к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = -y, \\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y, \\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решив первую систему, найдем, что

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{177}}{12},\ y_1 = \frac{3 - \sqrt{177}}{12};\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{177}}{12},\ y_2 = \frac{3 + \sqrt{177}}{12}.$$

Решив вторую систему, найдем, что

$$x_3 = \frac{7}{16},\ y_3 = -1\frac{5}{16};\quad x_4 = -1,\ y_4 = 3.$$

Решения исходной системы:

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{12}; \frac{3 - \sqrt{177}}{12}\right), \left(\frac{-3 - \sqrt{177}}{12}; \frac{3 + \sqrt{177}}{12}\right), \left(\frac{7}{16}; -1\frac{5}{16}\right), (-1;\ 3). \ \triangleleft$$

Пример 4. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 11, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$$

▶ Уравнения в этой системе содержат сумму переменных $x + y$, произведение xy и сумму квадратов $x^2 + y^2$. Если в этой системе заменить x на y, а y на x, то получим ту же систему. Такие системы называют *симметрическими системами*. Их удобно решать, вводя новые переменные.

Пусть $x + y = u$, $xy = v$. Тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. В результате получим систему

$$\begin{cases} u^2 - 2v + 3v = 11, \\ v + u = 5, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} u^2 + v = 11, \\ v + u = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки, найдем, что $u_1 = -2$, $v_1 = 7$, $u_2 = 3$, $v_2 = 2$. Выполнив обратную замену, получим совокупность систем

$$\begin{cases} x + y = -2, \\ xy = 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая имеет решения (1; 2) и (2; 1).

Решения исходной системы: (1; 2), (2; 1). ◁

Упражнения

507. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} (x - 2y)(x + 3y) = 0, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 6y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

508. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 6xy + 5y^2 - x + 5y \\ x^2 - 20y^2 = 5. \end{cases}$

509. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 14 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - 24 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - 6y = xy, \\ 3x^2 - 8y = 0{,}5xy. \end{cases}$

510. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 10y^2 = 0, \\ x^2 - 4xy + 3y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y - 6 = 0. \end{cases}$

511. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 2{,}1, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

512. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ y^2 + xy = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy = 7, \\ y^2 - xy = 9. \end{cases}$

513. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ x + y = 6. \end{cases}$

514. Найдите множество решений системы:

а) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x + xy + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x + xy + y = 1. \end{cases}$

515. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x(x + y) + y^2 = 49, \\ 4x(x - y) + y^2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x(3x - 4y) + 4y^2 = 64, \\ 3x(3x + 4y) + 4y^2 = 16. \end{cases}$

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 7

516. Докажите, что уравнение не имеет решений:

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5 = 0$; в) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = 0$;
б) $x^2 - 2xy + 8 + y^2 = 0$; г) $x^2y^2 - 2xy + 3 = 0$.

517. Докажите, что уравнение имеет единственное решение:

а) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$; б) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$.

518. Составьте уравнение, графиком которого является:

а) пара прямых $y = x + 5$ и $y = x - 5$;

б) окружность $x^2 + y^2 = 4$ и пара прямых $y = -3$ и $y = 3$;

в) гипербола $xy = 6$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$.

519. Постройте график уравнения:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$; б) $y^2 - x^4 = 0$.

520. Постройте график уравнения:

а) $\frac{y - x}{x - 2} = 0$; б) $\frac{y - x^2}{x^2 - 1} = 0$; в) $\frac{x^2 + y^2 - 16}{y^2 - 4} = 0$; г) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2} = 0$.

521. При каком значении a окружность $(x - a)^2 + (y - 3)^2 = 16$ проходит через точку:

а) $A(2; 3)$; б) $B(7; -1)$; в) $C(-2; 7)$; г) $D(1; 5)$?

522. Найдите целые решения уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 5$; б) $x^2 - y^2 = 8$.

523. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + x + x^2 = 0, \\ x - y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 4x + 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = 8, \\ (x + 1)^2 + y^2 = 81; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = 2x^2 - 14; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -x^2 + 4, \\ y = |x|. \end{cases}$

524. Изобразив схематически графики уравнений, определите, имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} x^2 - y + 11 = 0, \\ y + x^2 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 1, \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = |x|, \\ \frac{1}{2}x^3 - y = 0. \end{cases}$

525. Сколько решений может иметь система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ y = -x^2 + 4, \end{cases}$$

где r — положительное число?

526. При каких значениях m система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = m \end{cases}$$
имеет: а) одно решение; б) два решения?

527. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 3y = -1, \\ x^2 + 2xy + y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 5x - 2y = 26, \\ x - y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ xy - y^2 + 3x = -1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 + x - 40y = 19, \\ 2x - 3y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y - 11 = 0, \\ 2x + 5y - y^2 - 6 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 8x + 13y = 5, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$

528. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 4, \\ (x - 1)(y + 1) = 2xy + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ (x + 1)(y + 4) = 2xy - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - x = 1, \\ (2y + 1)(x - 1) = xy + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 1, \\ (x - 1)(y + 5) = y^2 - 12. \end{cases}$

529. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40, \\ xy = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172. \end{cases}$

530. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20 \\ x^2 - 2x + y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 + 3x - y = 1, \\ y^2 + 6x - 2y = 1. \end{cases}$

531. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + xy + y = 10, \\ xy - 2x - 2y = 2. \end{cases}$

532. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 3)(y - 5) = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ (x - 7y)(x + 7y) = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y + 1) = 0. \end{cases}$

533. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{20}, \\ x + 2y = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 14, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\dfrac{1}{12}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$

534. Имеет ли решения система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = -2, \\ 3x + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 - x + y = 100? \end{cases}$$

535. Имеют ли общую точку графики уравнений
$x + y = 7$, $2x - y = 2$, $x^2 + xy - y^2 - y = 1$?

536. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15, \\ x + xy + y = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3. \end{cases}$

537. Если умножить квадратный трехчлен $ax^2 - 2x + b$ на квадратный трехчлен $x^2 + ax - 1$, то получится многочлен четвертой степени, в котором коэффициенты при x^2 и x соответственно равны 8 и -2. Найдите a и b.

538. Сумма двух положительных чисел в 5 раз больше их разности. Найдите эти числа, если известно, что разность их квадратов равна 180.

539. Произведение двух чисел в 15 раз больше их суммы. Если к первому числу прибавить удвоенное второе число, то получится 100. Найдите эти числа.

540. Разность квадратов двух чисел равна 100. Если из утроенного первого числа вычесть удвоенное второе число, то получится 30. Найдите эти числа.

541. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и в 2 раза больше произведения его цифр.

542. Если числитель обыкновенной дроби возвести в квадрат, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 2. Если же числитель дроби уменьшить на 1, а знаменатель увеличить на 1, то получится дробь, равная $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

543. Если числитель обыкновенной дроби увеличить на 7, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная $\frac{3}{4}$. Если же числитель оставить без изменения, а знаменатель увеличить на 6, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

544. Диагональ прямоугольника равна 15 см. Если одну из его сторон уменьшить на 6 см, а другую уменьшить на 8 см, то периметр уменьшится в 3 раза. Найдите стороны прямоугольника.

545. Бассейн наполняется через первую трубу на 5 ч быстрее, чем через вторую. Бассейн можно наполнить, если открыть сначала одну первую трубу на 5 ч, а затем одну вторую на 7,5 ч. За сколько часов наполнится бассейн при совместной работе обеих труб?

546. Чтобы наполнить бассейн, сначала открыли одну трубу и через 2 ч, не закрывая ее, открыли другую. Через 4 ч совместной работы труб бассейн был наполнен. Одна вторая труба могла бы наполнить бассейн в 1,5 раза быстрее, чем одна первая. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу?

547. Из двух городов, расстояние между которыми равно 270 км, одновременно навстречу друг другу выходят два поезда и встречаются через 3 ч. На весь путь один из поездов тратит на 1 ч 21 мин больше, чем другой. Найдите скорость каждого поезда.

548. Из пунктов M и N выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Один из них пришел в N через 1 ч 15 мин после встречи, а другой — в M через 48 мин после встречи. Расстояние между пунктами M и N равно 90 км. Найдите скорости автомобилей.

549. Двое туристов идут навстречу друг другу из пунктов A и B. Первый вышел из A на 6 ч позже, чем второй из B, и при встрече оказалось, что он прошел на 12 км меньше второго. Продолжая движение с той же скоростью, первый пришел в B через 8 ч, а второй — в A через 9 ч после встречи. Найдите скорость каждого туриста.

К параграфу 8

550. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y - 2x > 2$; б) $x + y < -1$.

551. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством:

а) $(x-3)^2 + (y+3)^2 \leqslant 4$; б) $y \leqslant x^2 - 5x + 6$.

552. Где на координатной плоскости расположены точки, у которых:

а) абсцисса больше ординаты;
б) ордината больше абсциссы?

553. Какое множество точек координатной плоскости задается неравенством:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 8y \leqslant 0$; б) $x^2 - 6x + y + 4 > 0$?

554. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \geqslant |x|$; б) $y \leqslant |x - 2|$.

555. Какое множество точек задает на координатной плоскости неравенство:

а) $(x-1)(y-1) \geqslant 0$; б) $x^2 - y^2 > 0$?

556. Докажите, что множество решений неравенства $|x| + |y| \leqslant 1$ задается фигурой, изображенной на рисунке 74.

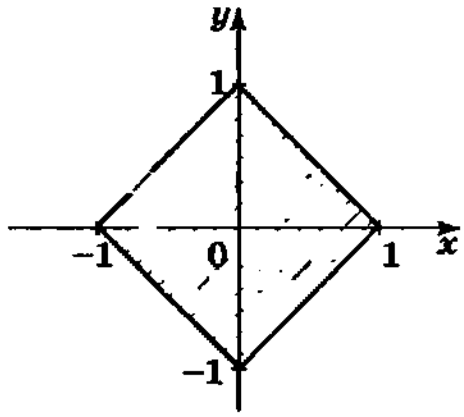


Рис. 74

557. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ xy \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$

558. Укажите какие-нибудь значения k и b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 2x + 3, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$

задает на координатной плоскости:

а) полосу; б) угол.

559. Каким множеством точек изображается множество решений неравенства:

а) $y(x^2 + y^2 - 1) \geqslant 0$; б) $x(x^2 - y) \leqslant 0$?

Глава IV АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

§ 9. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

24. Последовательности

Будем выписывать в порядке возрастания положительные четные числа. Первое такое число равно 2, второе 4, третье 6, четвертое 8 и т. д. Получим *последовательность*

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \dots .$$

Ясно, что на пятом месте в этой последовательности будет число 10, на десятом — число 20, на сотом — число 200. Вообще для любого натурального числа n можно указать соответствующее ему положительное четное число; оно равно $2n$.

Рассмотрим еще одну последовательность. Будем выписывать в порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \dots .$$

Для любого натурального числа n мы можем указать соответствующую дробь, стоящую в этой последовательности на n-м месте; она равна $\frac{1}{n+1}$. Так, на шестом месте должна стоять дробь $\frac{1}{7}$, на тридцатом — дробь $\frac{1}{31}$, на тысячном — дробь $\frac{1}{1001}$.

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности*. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена, например a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. (читают: «a первое, a второе, a третье, a четвертое» и т. д.). Вообще член последовательности с номером n, или, как говорят, *n-й член последовательности*, обозначают a_n. Саму последовательность будем обозначать так: (a_n).

В рассмотренных примерах мы имели дело с последовательностями, содержащими бесконечно много членов. Такие последовательности называются *бесконечными*.

Заметим, что последовательность может содержать конечное число членов. В таком случае ее называют *конечной*. Например, конечной является последовательность двузначных чисел

$$10;\ 11;\ 12;\ 13;\ \dots;\ 98;\ 99.$$

Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером.

Часто последовательность задают с помощью *формулы n-го члена последовательности*. Например, последовательность положительных четных чисел можно задать формулой $a_n = 2n$, последовательность правильных дробей с числителем, равным 1, — формулой $b_n = \frac{1}{n+1}$. Приведем другие примеры.

Пример 1. Пусть последовательность задана формулой $y_n = n^2 - 3n$. Подставляя вместо n натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., получаем

$$y_1 = -2,\ y_2 = -2,\ y_3 = 0,\ y_4 = 4,\ y_5 = 10,\ \dots .$$

Рассматриваемая последовательность начинается так:

$$-2;\ -2;\ 0;\ 4;\ 10;\ \dots .$$

Пример 2. Пусть последовательность задана формулой $x_n = (-1)^n \cdot 10$. Все члены этой последовательности с нечетными номерами равны -10, а с четными номерами равны 10:

$$x_1 = -10,\ x_2 = 10,\ x_3 = -10,\ x_4 = 10,\ \dots .$$

Получаем последовательность

$$-10;\ 10;\ -10;\ 10;\ -10;\ \dots .$$

Пример 3. Формулой $c_n = 5$ задается последовательность, все члены которой равны 5:

$$5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5;\ \dots .$$

Рассмотрим еще один способ задания последовательности. Он состоит в том, что указывают ее первый член или первые несколько членов и формулу, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие (один или несколько). Такую формулу называют *рекуррентной* (от латинского слова *recurro* — возвращаться), а соответствующий способ задания последовательности — рекуррентным способом.

Приведем пример задания последовательности рекуррентным способом.

Пример 4. Пусть (u_n) — последовательность, в которой $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ при $n > 2$.

Выпишем первые несколько ее членов:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \dots .$$

Эта последовательность описана в работах итальянского математика Леонардо из Пизы, известного под именем Леонардо Фибоначчи (1180—1240). Члены этой последовательности называют *числами Фибоначчи*.

Упражнения

560. Выпишите первые несколько членов последовательности натуральных чисел, кратных 3, взятых в порядке возрастания. Укажите ее первый, пятый, десятый, сотый и n-й члены.

561. Известно, что (c_n) — последовательность, все члены которой с нечетными номерами равны -1, а с четными равны 0. Выпишите первые восемь членов этой последовательности. Найдите c_{10}, c_{25}, c_{200}, c_{253}, c_{2k}, c_{2k+1} (k — произвольное натуральное число).

562. Пусть (a_n) — последовательность квадратов натуральных чисел. Выпишите первые десять ее членов. Найдите a_{20}, a_{40}, a_n.

563. Какой член последовательности a_1, a_2, a_3, ... :

а) следует за членом a_{99}, a_{200}, a_n, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n};

б) предшествует члену a_{71}, a_{100}, a_{n-2}, a_{n+3}, a_{3n}?

564. Перечислите члены последовательности (x_n), которые расположены между:

а) x_{31} и x_{35}; б) x_n и x_{n+6}; в) x_{n-4} и x_n; г) x_{n-2} и x_{n+2}.

565. Найдите первые шесть членов последовательности, заданной формулой n-го члена:

а) $x_n = 2n - 1$; в) $x_n = \frac{n}{n+1}$; д) $x_n = 2^{n-3}$;

б) $x_n = n^2 + 1$; г) $x_n = (-1)^{n+1} \cdot 2$; е) $x_n = 0{,}5 \cdot 4^n$.

566. Последовательность (b_n) задана формулой $b_n = 2n^2 + 3n$. Найдите: а) b_5; б) b_{10}; в) b_{50}.

567. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = n^2 - n - 20$. Укажите номера отрицательных членов последовательности и вычислите эти члены.

568. Вычислите второй, третий, четвертый и пятый члены последовательности (b_n), если известно, что:

а) первый член равен 10, а каждый следующий на 3 больше предыдущего, т. е. $b_1 = 10$ и $b_{n+1} = b_n + 3$;

б) первый член равен 40, а каждый следующий равен предыдущему, деленному на 2, т. е. $b_1 = 40$ и $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$.

569. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n), если:

а) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; в) $a_1 = 16$, $a_{n+1} = -0{,}5a_n$;

б) $a_1 = 1000$, $a_{n+1} = 0{,}1a_n$; г) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^{-1}$.

570. Выпишите первые четыре члена последовательности (b_n), если:

а) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n + 5$; б) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n \cdot 5$.

571. Найдите пару положительных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 45$, если известно, что y вдвое больше x.

572. Решите уравнение:

а) $4x^4 + 4x^2 - 15 = 0$; б) $2x^4 - x^2 - 36 = 0$.

573. Решите неравенство:

а) $x^2 + x - 42 \leqslant 0$; б) $(x + 11)(x + 4)(x - 1) > 0$.

574. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:

а) $81 \cdot 3^{-6}$; б) $\dfrac{(-3^{-3})^3}{-9^{-2}}$; в) $9^{-5} \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}$; г) $(-3^{-3})^2 \cdot 27^3$.

25. Определение арифметической прогрессии. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

Рассмотрим последовательность натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1:

$$1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \ldots .$$

Каждый ее член, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену числа 4. Эта последовательность является примером *арифметической прогрессии*.

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Иначе говоря, последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна d, т. е. при любом натуральном n верно равенство

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Число d называют *разностью арифметической прогрессии.*

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и разность.

Приведем примеры.

Если $a_1 = 1$ и $d = 1$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots,$$

члены которой — последовательные натуральные числа.

Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \ldots,$$

которая является последовательностью положительных нечетных чисел.

Если $a_1 = -2$ и $d = -2$, то получим арифметическую прогрессию

$$-2;\ -4;\ -6;\ -8;\ -10;\ \ldots,$$

которая является последовательностью отрицательных четных чисел.

Если $a_1 = 7$ и $d = 0$, то имеем арифметическую прогрессию

$$7;\ 7;\ 7;\ 7;\ 7;\ \ldots,$$

все члены которой равны между собой.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член, вычисляя последовательно второй, третий, четвертый и т. д. члены. Однако для нахождения члена прогрессии с большим номером такой способ неудобен. Постараемся отыскать способ, требующий меньшей вычислительной работы.

По определению арифметической прогрессии

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \\ a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d. \end{aligned}$$

Точно так же находим, что $a_6 = a_1 + 5d$, и вообще, чтобы найти a_n, нужно к a_1 прибавить $(n-1)d$, т. е.

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n-1).}$$

Мы получили *формулу n-го члена арифметической прогрессии.*

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия, в которой $c_1 = 0{,}62$ и $d = 0{,}24$. Найдем пятидесятый член этой прогрессии.

▶ Имеем

$$c_{50} = 0{,}62 + 0{,}24 \cdot (50 - 1) = 12{,}38. \ ◁$$

Пример 2. Выясним, является ли число -122 членом арифметической прогрессии (x_n):

$$23;\ 17{,}2;\ 11{,}4;\ 5{,}6;\ \ldots.$$

▶ В данной арифметической прогрессии $x_1 = 23$ и $d = x_2 - x_1 = 17{,}2 - 23 = -5{,}8$. Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$$x_n = 23 - 5{,}8\,(n - 1), \text{ т. е.}$$
$$x_n = 28{,}8 - 5{,}8n.$$

Число -122 является членом арифметической прогрессии (x_n), если существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $28{,}8 - 5{,}8n$ равно -122.
Решим уравнение $28{,}8 - 5{,}8n = -122$:

$$5{,}8n = 150{,}8, \quad n = 26.$$

Значит, число -122 является 26-м членом данной арифметической прогрессии. ◁

Отметим важное свойство арифметической прогрессии:

> каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

● Действительно, если последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, \quad \text{т. е.}$$
$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \ \bigcirc$$

Верно и обратное утверждение:

> если в последовательности (a_n) каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

● Действительно, из равенства

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ где } n \geqslant 2,$$

следует, что

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$
$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

а это означает, что разность между последующим и предыдущим членами последовательности (a_n) остается постоянной. Значит, последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. ○

Заметим, что формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ можно записать иначе:

$$a_n = dn + (a_1 - d).$$

Отсюда ясно, что

любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида

$$a_n = kn + b,$$

где k и b — некоторые числа.

Верно и обратное:

последовательность (a_n), заданная формулой вида

$$a_n = kn + b,$$

где k и b — некоторые числа, является арифметической прогрессией.

● Действительно, найдем разность $(n+1)$-го и n-го членов последовательности (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b - kn - b = k.$$

Значит, при любом n справедливо равенство $a_{n+1} = a_n + k$, и по определению последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, причем разность этой прогрессии равна k. ○

Упражнения

575. Выпишите первые пять членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 10$, $d = 4$;
б) $a_1 = 30$, $d = -10$;
в) $a_1 = 1{,}7$, $d = -0{,}2$;
г) $a_1 = -3{,}5$, $d = 0{,}6$.

576. Последовательность (b_n) — арифметическая прогрессия, первый член которой равен b_1, а разность равна d. Выразите через b_1 и d:

а) b_7; б) b_{26}; в) b_{231}; г) b_k; д) b_{k+5}; е) b_{2k}.

577. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) c_5, если $c_1 = 20$ и $d = 3$; б) c_{21}, если $c_1 = 5{,}8$ и $d = -1{,}5$.

578. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) a_{11}, если $a_1 = -3$ и $d = 0{,}7$; б) a_{26}, если $a_1 = 18$ и $d = -0{,}6$.

579. Найдите десятый и n-й члены арифметической прогрессии:

а) $\frac{1}{3}$; -1; ... ; б) 2,3; 1; ... .

580. Найдите 23-й и n-й члены арифметической прогрессии:

а) -8; $-6{,}5$; ... ; б) 11; 7; ... .

581. Тело в первую секунду движения прошло 7 м, а за каждую следующую секунду — на 3 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние тело прошло за восьмую секунду?

582. Поезд, отойдя от станции, равномерно увеличивал скорость на 50 м в минуту. Какова была скорость поезда в конце двадцатой минуты?

583. На стороне OA угла AOB от его вершины отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые (рис. 75). Длина отрезка A_1B_1 равна 1,5 см. Найдите длину отрезка A_5B_5; $A_{10}B_{10}$.

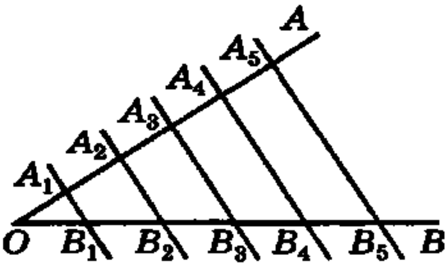


Рис. 75

584. Найдите первый член арифметической прогрессии (x_n), если:

а) $x_{30} = 128$, $d = 4$;

б) $x_{45} = -208$, $d = -7$.

585. Найдите разность арифметической прогрессии (y_n), в которой:

а) $y_1 = 10$, $y_5 = 22$; б) $y_1 = 28$, $y_{15} = -21$.

586. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) c_1, если $c_{36} = 26$ и $d = 0{,}7$;

б) d, если $c_1 = -10$ и $c_{15} = 1{,}2$.

587. Между числами 5 и 1 вставьте семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

588. Между числами 2,5 и 4 вставьте четыре таких числа, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию.

589. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (c_n), если: а) $c_5 = 27$, $c_{27} = 60$; б) $c_{20} = 0$, $c_{66} = -92$.

590. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (x_n), если $x_{16} = -7$ и $x_{26} = 55$.

591. Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9; ... число: а) 156; б) 295?

592. Дана арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_1 = 32$ и $d = -1,5$. Является ли членом этой прогрессии число: а) 0; б) -28?

593. В арифметической прогрессии (x_n) первый член равен 8,7, а разность равна $-0,3$. Для каких членов прогрессии выполняется условие: а) $x_n \geqslant 0$; б) $x_n < 0$?

594. Найдите номера отрицательных членов арифметической прогрессии $-20,3$; $-18,7$; ... . Чему равен первый положительный член этой прогрессии?

595. Докажите, что если числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ и $b^2 + bc + c^2$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

596. Известно, что числа a^2, b^2, c^2 — последовательные члены арифметической прогрессии. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

597. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

а) $a_n = 3n + 1$; в) $a_n = n + 4$; д) $a_n = -0,5n + 1$;

б) $a_n = n^2 - 5$; г) $a_n = \frac{1}{n+4}$; е) $a_n = 6n$?

Если последовательность — арифметическая прогрессия, найдите ее первый член и разность.

598. Докажите, что последовательность сумм внутренних углов треугольника, выпуклого четырехугольника, выпуклого пятиугольника и т. д. является арифметической прогрессией. Чему равна ее разность?

599. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 2, \\ x^2 - y^2 = -12. \end{cases}$$

600. Решите уравнение:

а) $x^3 + 4x^2 - 32x = 0$; б) $x^3 - 10x^2 + 4x - 40 = 0$.

601. Решите неравенство:

а) $(2x - 1)(x + 8) > 0$; б) $(33 - x)(16 + 2x) \leqslant 0$.

602. Найдите значение выражения:

а) $125^{-1} \cdot 25^2$; в) $\frac{16^{-3} \cdot 4^5}{8}$;

б) $0,0001 \cdot (10^3)^2 \cdot (0,1)^{-2}$; г) $9^4 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-3} \cdot 81^{-4}$.

26. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

Пусть требуется найти сумму первых ста натуральных чисел. Покажем, как можно решить эту задачу, не выполняя непосредственного сложения чисел.

Обозначим искомую сумму через S и запишем ее дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания, а во втором — в порядке убывания:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1.$$

Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, дает в сумме 101. Всего таких пар 100. Поэтому, сложив равенства почленно, получим

$$2S = 101 \cdot 100,$$
$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 = 5050.$$

С рассмотренной задачей связана история, которую рассказывают об известном немецком математике Карле Гауссе. Когда учитель предложил ученикам третьего класса сложить все числа от 1 до 100 включительно, рассчитывая при этом надолго занять их работой, маленький Карл моментально подошел с готовым ответом. Возможно, он заметил, что каждая из сумм $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... равна 101, а таких сумм 50.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые мы провели при вычислении суммы первых ста натуральных чисел, можно найти сумму первых n членов любой арифметической прогрессии.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) через S_n и запишем эту сумму дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания их номеров, а во втором случае в порядке убывания:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n, \quad (1)$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + ... + a_2 + a_1. \quad (2)$$

Сумма каждой пары членов прогрессии, расположенных друг под другом, равна $a_1 + a_n$. Действительно,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$
$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

и т. д.

Число таких пар равно n. Поэтому, сложив почленно равенства (1) и (2), получим

$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

Разделив обе части последнего равенства на 2, получим *формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \qquad \text{(I)}$$

Заметим, что если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Подставив в формулу (I) вместо a_n выражение $a_1 + d(n - 1)$, получим

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + d(n-1))n}{2},$$

т. е.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n. \qquad \text{(II)}$$

Приведем примеры на вычисление суммы членов арифметической прогрессии.

Пример 1. Найдем сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии 4; 5,5; ... .

▶ В данной арифметической прогрессии $a_1 = 4$, $d = 1{,}5$. Тридцатый член прогрессии найдем по формуле n-го члена:

$$a_{30} = 4 + 1{,}5 \cdot 29 = 47{,}5.$$

Теперь вычислим сумму первых тридцати членов, воспользовавшись формулой (I):

$$S_{30} = \frac{(4 + 47{,}5) \cdot 30}{2} = 772{,}5.$$

Если для решения рассмотренной задачи воспользоваться формулой (II), то вычисления будут выглядеть так:

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 4 + 1{,}5 \cdot 29}{2} \cdot 30 = 772{,}5.$$ ◄

КАРЛ ГАУСС (1777—1855) — немецкий математик, астроном, геодезист, физик. Выдающиеся математические способности проявил в раннем детстве. Его многочисленные исследования в области алгебры, теории чисел, геометрии и математического анализа оказали значительное влияние на развитие теоретической и прикладной математики, астрономии, геодезии, физики.

Пример 2. Найдем сумму первых сорока членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 5n - 4$.

▶ Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, так как она задана формулой вида $a_n = kn + b$, где $k = 5$ и $b = -4$. Найдем первый и сороковой члены этой арифметической прогрессии: $a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$, $a_{40} = 5 \cdot 40 - 4 = 196$.
Теперь по формуле (I) вычислим S_{40}:

$$S_{40} = \frac{(1 + 196) \cdot 40}{2} = 3940. \ \triangleleft$$

Пример 3. Найдем сумму всех натуральных чисел, кратных шести и не превосходящих 250.

▶ Натуральные числа, кратные шести, образуют арифметическую прогрессию, которую можно задать формулой $a_n = 6n$. Чтобы выяснить, сколько членов этой прогрессии не превосходят 250, решим неравенство $6n \leqslant 250$. Получим $n \leqslant 41\frac{2}{3}$. Значит, число членов прогрессии, сумму которых надо найти, равно 41.
Имеем

$$a_1 = 6, \ a_{41} = 6 \cdot 41 = 246,$$

$$S_{41} = \frac{(6 + 246) \cdot 41}{2} = 5166. \ \triangleleft$$

Пример 4. Пифагор (IV в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами. Подсчитывая число кружков в треугольниках, квадратах, пятиугольниках (рис. 76), они получали:

— последовательность (a_n) треугольных чисел

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots ;$$

— последовательность (b_n) квадратных чисел

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots ;$$

— последовательность (c_n) пятиугольных чисел

$$1, 5, 12, 22, 35, \dots .$$

ДИОФАНТ (III в.) — древнегреческий математик из Александрии. В его «Арифметике» изложены начала алгебры, решен ряд задач, сводящихся к неопределенным уравнениям различных степеней. Теория диофантовых уравнений и теория диофантовых приближений — так названы два больших раздела современной теории чисел. Его труды оказали большое влияние на развитие математики.

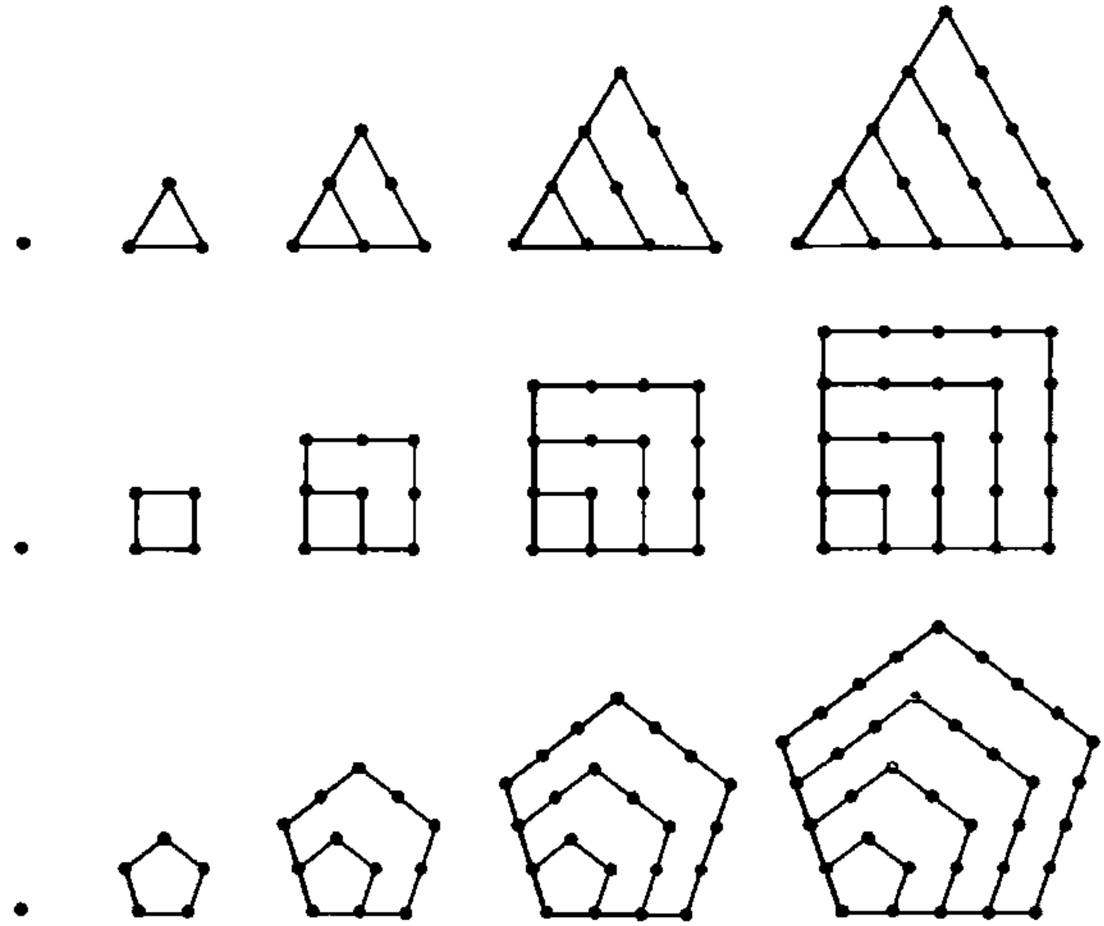


Рис. 76

Зададим каждую из этих последовательностей формулой n-го члена.

▶ Последовательность (a_n) треугольных чисел получается из последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... , т. е. из арифметической прогрессии, в которой первый член и разность равны 1, следующим образом:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 2$, $a_3 = 1 + 2 + 3$, $a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

Значит, $a_n = \frac{1+n}{2}n$.

Последовательность (b_n) квадратных чисел аналогичным способом получается из последовательности нечетных чисел 1, 3, 5, ... , т. е. из арифметической прогрессии, первый член которой равен 1 и разность равна 2:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1 + 3,\ b_3 = 1 + 3 + 5,$$
$$b_n = 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1.$$

Следовательно, $b_n = \frac{1+2n-1}{2}n$, $b_n = n^2$. Мы пришли к формуле, очевидной для последовательности квадратных чисел.

Последовательность (c_n) пятиугольных чисел таким же способом можно получить из арифметической прогрессии 1, 4, 7, ... , в которой первый член равен 1 и разность равна 3:

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1 + 4,\ c_3 = 1 + 4 + 7,$$

$$c_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3(n - 1)).$$

Значит, $c_n = \frac{1 + 1 + 3(n-1)}{2}n$, $c_n = \frac{3n-1}{2}n$. ◁

Упражнения

603. Найдите сумму первых шестидесяти членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 3$, $a_{60} = 57$; б) $a_1 = -10{,}5$, $a_{60} = 51{,}5$.

604. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии:

а) -23; -20; ... ; б) 14,2; 9,6; ... .

605. Вычислите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -17$, $d = 6$; б) $b_1 = 6{,}4$, $d = 0{,}8$.

606. Найдите сумму первых пятидесяти, ста, n членов последовательности (x_n), если:

а) $x_n = 4n + 2$; б) $x_n = 2n + 3$.

607. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 3n + 2$. Найдите сумму первых двадцати ее членов.

608. Найдите:

а) сумму $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$, слагаемыми которой являются все четные натуральные числа от 2 до $2n$;
б) сумму $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, слагаемыми которой являются все нечетные натуральные числа от 1 до $2n - 1$.

609. Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, не превосходящих 150;
б) всех натуральных чисел от 20 до 120 включительно;
в) всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 300;
г) всех натуральных чисел, кратных 7 и не превосходящих 130.

610. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по тридцатый включительно, если первый член равен 10 и разность равна 3.

611. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с шестого по двадцать пятый включительно, если первый член равен 21 и разность равна $-0{,}5$.

612. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (c_n), если $c_7 = 18{,}5$ и $c_{17} = -26{,}5$.

613. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии (b_n), если $b_1 = 4{,}2$ и $b_{10} = 15{,}9$.

614. При свободном падении тело прошло в первую секунду 5 м, а в каждую следующую на 10 м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло ее дна через 5 с после начала падения.

615. Какое расстояние пройдет свободно падающее тело:

а) за пятую секунду после начала падения;
б) за пять секунд после начала падения?

616. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д. (рис. 77). Во сколько рядов размещены шары, если их число равно 120? Сколько потребуется шаров, чтобы составить треугольник из 30 рядов?

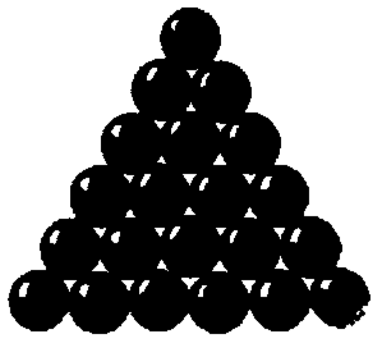


Рис. 77

617. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии

$$3,\ 5,\ 7,\ \dots,$$

сумма которых не превосходит 120.

618. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии 17, 14, 11, ... , при сложении которых получается положительное число.

619. В арифметической прогрессии $a_7 = 8$ и $a_{11} = 12{,}8$. Найдите a_1 и d.

620. Является ли членом арифметической прогрессии 20,7; 18,3; ... число:

а) $-1{,}3$; б) $-3{,}3$?

621. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 = 13, \\ 3xy = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ y^2 - 4x^2 = 9. \end{cases}$

622. Покажите штриховкой множество точек, которое задает на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ 2y + x \leqslant 5. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Приведите пример последовательности, заданной:
а) формулой n-го члена; б) рекуррентной формулой.
Найдите пять первых членов этой последовательности.
2. Сформулируйте определение арифметической прогрессии. Какое число называют разностью арифметической прогрессии?
3. Как выражается любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, через предыдущий и последующий члены?
4. Запишите формулы n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии.

§ 10. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

27. Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии

Рассмотрим последовательность, членами которой являются степени числа 2 с натуральными показателями:

$$2;\ 2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ 2^5;\ 2^6;\ \dots .$$

Каждый член этой последовательности, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является примером *геометрической прогрессии*.

Определение. Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Иначе говоря, последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, если для любого натурального n выполняются условия

$$b_n \neq 0 \text{ и } b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где q — некоторое число.

Обозначим, например, через (b_n) последовательность натуральных степеней числа 2. В этом случае для любого натурального n верно равенство $b_{n+1} = b_n \cdot 2$, здесь $q = 2$.

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т. е. при любом натуральном n верно равенство

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Число q называют *знаменателем геометрической прогрессии*. Ясно, что знаменатель геометрической прогрессии отличен от нуля.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и знаменатель.

Приведем примеры.

Если $b_1 = 1$ и $q = 0{,}1$, то получим геометрическую прогрессию

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots .$$

Условиями $b_1 = -5$ и $q = 2$ задается геометрическая прогрессия

$$-5;\ -10;\ -20;\ -40;\ -80;\ \ldots .$$

Если $b_1 = 2$ и $q = -3$, то имеем прогрессию

$$2;\ -6;\ 18;\ -54;\ 162;\ \ldots .$$

Если $b_1 = 8$ и $q = 1$, то получим геометрическую прогрессию

$$8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ \ldots .$$

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии, можно найти последовательно второй, третий и вообще любой ее член:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1q, \\ b_3 &= b_2q = (b_1q)q = b_1q^2, \\ b_4 &= b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3, \\ b_5 &= b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4. \end{aligned}$$

Точно так же находим, что $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1q^6$ и т. д. Вообще, чтобы найти b_n, мы должны b_1 умножить на q^{n-1}, т. е.

$$b_n = b_1q^{n-1}.$$

Мы получили *формулу n-го члена геометрической прогрессии*.

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. В геометрической прогрессии $b_1 = 12{,}8$ и $q = \frac{1}{4}$. Найдем b_7.

▶ По формуле n-го члена геометрической прогрессии

$$b_7 = 12{,}8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{128}{10} \cdot \frac{1}{4^6} = \frac{2^7}{10 \cdot 2^{12}} = \frac{1}{2^5 \cdot 10} = \frac{1}{320}. \ \triangleleft$$

Пример 2. Найдем восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 162$ и $b_3 = 18$.

▶ Зная первый и третий члены геометрической прогрессии, можно найти ее знаменатель. Так как $b_3 = b_1q^2$, то

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}.$$

Решив уравнение

$$q^2 = \frac{1}{9},$$

найдем, что

$$q = \frac{1}{3} \text{ или } q = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = \frac{1}{3}$, то

$$b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}.$$

Если $q = -\frac{1}{3}$, то

$$b_8 = b_1q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}.$$

Задача имеет два решения:

$$b_8 = \frac{2}{27} \text{ или } b_8 = -\frac{2}{27}. \triangleleft$$

Пример 3. Вкладчик положил в банк 5000 р. на счет, по которому сумма вклада ежегодно возрастает на 8%. Какая сумма будет у него на счету через 6 лет?

▶ Начальная сумма вклада составляла 5000 р. Через год эта сумма возрастет на 8% и составит 108% от 5000 р., т. е. будет равна $5000 \cdot 1{,}08$ р. Через 2 года накопленная сумма составит $(5000 \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08$ р., т. е. $5000 \cdot 1{,}08^2$ р. Через 3 года на счету у вкладчика будет $(5000 \cdot 1{,}08^2) \cdot 1{,}08 = 5000 \cdot 1{,}08^3$ р. и т. д.

Таким образом, мы имеем дело с геометрической прогрессией

$$5000,\ 5000 \cdot 1{,}08,\ 5000 \cdot 1{,}08^2,\ 5000 \cdot 1{,}08^3,\ \ldots .$$

Сумма, накопленная на счету у вкладчика, через 6 лет будет равна седьмому члену этой прогрессии, т. е. составит $5000 \cdot 1{,}08^6$.

Выполнив вычисления, найдем, что

$$5000 \cdot 1{,}08^6 \approx 7934.$$

(При выполнении вычислений удобно использовать калькулятор.) Значит, на счету у вкладчика через 6 лет окажется сумма, приближенно равная 7934 р. ◁

В рассмотренном примере нам приходилось вычислять один и тот же процент от величины, найденной на предыдущем шаге. В таких случаях говорят, что мы имеем дело со *сложными процентами*.

Геометрическая прогрессия обладает следующим свойством:

> квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего ее членов.

● Действительно, если последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то

$$b_n = b_{n-1}q, \quad b_{n+1} = b_nq.$$

Так как все члены геометрической прогрессии отличны от нуля, то отсюда следует, что

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}. \ ○$$

Верно и обратное утверждение:

> если в последовательности чисел, отличных от нуля, квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией.

Докажите это самостоятельно.

Заметим, что из равенства $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, выражающего свойство геометрической прогрессии, следует, что $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, т. е. модуль любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов.

Упражнения

623. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 6$, $q = 2$;

б) $b_1 = -16$, $q = \frac{1}{2}$;

в) $b_1 = -24$, $q = -1{,}5$;

г) $b_1 = 0{,}4$, $q = \sqrt{2}$.

624. Последовательность (c_n) — геометрическая прогрессия, первый член которой равен c_1, а знаменатель равен q. Выразите через c_1 и q:

а) c_6; б) c_{20}; в) c_{125}; г) c_k; д) c_{k+3}; е) c_{2k}.

625. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) x_7, если $x_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$; в) x_{10}, если $x_1 = \sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$;

б) x_8, если $x_1 = -810$, $q = \frac{1}{3}$; г) x_6, если $x_1 = -125$, $q = 0{,}2$.

626. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) b_5, если $b_1 = \frac{3}{4}$, $q = \frac{2}{3}$; б) b_4, если $b_1 = 1{,}8$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

627. Найдите седьмой и n-й члены геометрической прогрессии:

а) 2; −6; ... ; в) −0,125; 0,25; ... ;
б) −40; −20; ... ; г) −10; 10; ... .

628. Найдите шестой и n-й члены геометрической прогрессии:

а) 48; 12; ... ; в) −0,001; −0,01; ... ;
б) $\frac{64}{9}$; $-\frac{32}{3}$; ... ; г) −100; 10; ... .

629. В треугольнике ABC (рис. 78) провели среднюю линию A_1C_1, в треугольнике A_1BC_1 также провели среднюю линию A_2C_2, во вновь образовавшемся треугольнике A_2BC_2 снова провели среднюю линию A_3C_3 и т. д. Найдите площадь треугольника A_9BC_9, если известно, что площадь треугольника ABC равна 768 см^2.

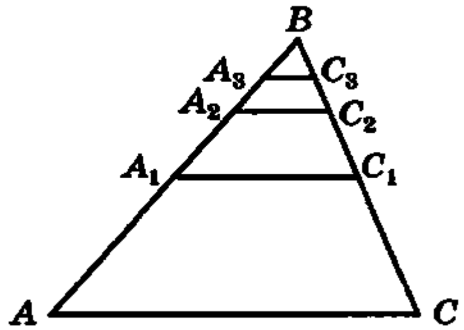


Рис. 78

630. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_6 = 3$, $q = 3$; б) $b_5 = 17\frac{1}{2}$, $q = -2\frac{1}{2}$.

631. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (c_n), если:

а) $c_5 = -6$, $c_7 = -54$; б) $c_6 = 25$, $c_8 = 4$.

632. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) x_1, если $x_6 = 0{,}32$, $q = 0{,}2$; б) q, если $x_3 = -162$, $x_5 = -18$.

633. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) b_6, если $b_1 = 125$, $b_3 = 5$;

б) b_7, если $b_1 = -\frac{2}{9}$, $b_3 = -2$;

в) b_1, если $b_4 = -1$, $b_6 = -100$.

634. Между числами 2 и 162 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.

635. Геометрическая прогрессия (x_n) состоит из четырех членов: 2, a, b, $\frac{1}{4}$. Найдите a и b.

636. Найдите шестой член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_2 = 6$, $b_4 = 24$.

637. Ежегодный доход по вкладу «Юбилейный» составляет 9%. Каким станет этот вклад через 4 года, если первоначально он был равен 8000 р.?

638. Население города составляет 60 тысяч человек. За последние годы наблюдается ежегодный прирост населения на 2%. Каким будет население города через 5 лет, если эта тенденция сохранится?

639. На опытном участке леса ежегодный прирост древесины составляет 10%. Какое количество древесины будет на этом участке через 6 лет, если первоначальное количество древесины равно $2{,}0 \cdot 10^4$ м^3?

640. После каждого движения поршня разрежающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нем воздуха. Определите давление воздуха внутри сосуда после шести движений поршня, если первоначально давление было равно 760 мм рт. ст.

641. Дан равносторонний треугольник со стороной 8 см. Из его высот построен второй треугольник. Из высот второго треугольника построен третий и т. д. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию, и найдите периметр шестого треугольника.

642. В равносторонний треугольник, сторона которого равна 16 см, вписан другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон первого. Во второй треугольник таким же способом вписан третий и т. д. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию. Найдите периметр восьмого треугольника.

643. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Найдите эти числа, если известно, что, уменьшив второе из них на 1 и увеличив третье на 1, мы получим геометрическую прогрессию.

644. Сумма трех положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15. Найдите эти числа, если известно, что, увеличив первое и второе числа на 1, а третье на 4, мы получим геометрическую прогрессию.

645. Найдите координаты точки, принадлежащей графику уравнения $x^2 - y^2 = 30$, если известно, что их сумма равна 5.

646. Решите неравенство:

а) $2x^2 - 13x - 34 \geqslant 0$; б) $10x - 4x^2 < 0$; в) $\frac{x-4}{2x+5} \leqslant 0$.

647. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, которое задает система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 20{,}25, \\ y - x \geqslant 2. \end{cases}$$

28. Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

Согласно легенде индийский принц решил наградить изобретателя шахмат и предложил ему самому выбрать награду. Изобретатель шахмат попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую — в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью — еще в 2 раза больше, т. е. 4 зерна, и так далее до 64-й клетки. Каково же было удивление принца, когда он узнал, что такую, казалось бы, скромную просьбу невозможно выполнить.

Действительно, число зерен, о которых идет речь, является суммой шестидесяти четырех членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 2. Обозначим эту сумму через S:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии, получим

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Вычтем почленно из второго равенства первое и проведем упрощения:

$$2S - S = (2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}),$$

$$S = 2^{64} - 1.$$

Можно подсчитать, что масса такого числа пшеничных зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Выведем теперь формулу суммы первых n членов произвольной геометрической прогрессии. Воспользуемся тем же приемом, с помощью которого была вычислена сумма S.

Пусть дана геометрическая прогрессия (b_n). Обозначим сумму первых n ее членов через S_n:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_nq = b_1q + b_2q + b_3q + \ldots + b_{n-1}q + b_nq.$$

Учитывая, что

$$b_1q = b_2,\ b_2q = b_3,\ b_3q = b_4,\ \ldots,\ b_{n-1}q = b_n,$$

получим

$$S_nq = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_nq. \qquad (2)$$

Вычтем почленно из равенства (2) равенство (1) и приведем подобные члены:

$$S_nq - S_n = (b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_nq) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n) = b_nq - b_1,$$

$$S_n(q-1) = b_nq - b_1.$$

Отсюда следует, что при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q-1}. \qquad (\mathrm{I})$$

Мы получили *формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии*, в которой $q \neq 1$. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$.

При решении многих задач удобно пользоваться формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии, записанной в другом виде. Подставим в формулу (I) вместо b_n выражение b_1q^{n-1}. Получим

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \text{ если } q \neq 1. \qquad (\mathrm{II})$$

Пример 1. Найдем сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3$ и $q = \frac{1}{2}$.

▶ Так как известны первый член и знаменатель прогрессии, то удобно воспользоваться формулой (II). Получим

$$S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q-1} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 6 - \frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}. \ \triangleleft$$

Пример 2. Найдем сумму $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$, где $x \neq 1$, слагаемые которой являются последовательными членами геометрической прогрессии $1; x; x^2; ...$.

▶ Первый член прогрессии равен 1, а знаменатель равен x. Так как x^{n-1} является членом этой прогрессии с номером n, то задача состоит в нахождении суммы первых n ее членов. Воспользуемся формулой (I):

$$S_n = \frac{x^{n-1}x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Таким образом, если $x \neq 1$, то

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \triangleleft$$

Пример 3. Найдем сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_3 = 12$ и $b_5 = 48$.

▶ Зная b_3 и b_5, можно найти знаменатель прогрессии q. Так как $b_5 = b_3q^2$, то

$$q^2 = \frac{b_5}{b_3} = \frac{48}{12} = 4.$$

Значит,

$$q = 2 \text{ или } q = -2.$$

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = -2$, то $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 3$ и $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -63.$

Если $q = 2$, то $b_1 = 3$ и $S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189. \triangleleft$

Упражнения

648. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 8,\ q = \frac{1}{2}$; б) $b_1 = 500,\ q = \frac{1}{5}$.

649. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии:

а) $3; -6; ...$; в) $-32; -16; ...$;

б) $54; 36; ...$; г) $1; -\frac{1}{2}; ...$.

650. Вычислите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии, если:

а) $c_1 = -4,\ q = 3$; б) $c_1 = 1,\ q = -2$.

651. Докажите, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, и найдите сумму первых n ее членов, если:

а) $b_n = 0{,}2 \cdot 5^n$; б) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; в) $b_n = 3^{1+n}$.

652. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии:

а) $1;\ 3;\ 3^2;\ \ldots$; г) $1;\ -x;\ x^2;\ \ldots$, где $x \neq -1$;

б) $2;\ 2^2;\ 2^3;\ \ldots$; д) $1;\ x^2;\ x^4;\ \ldots$, где $x \neq \pm 1$;

в) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots$; е) $1;\ -x^3;\ x^6;\ \ldots$, где $x \neq -1$.

653. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если: а) $b_7 = 72{,}9$, $q = 1{,}5$; б) $b_5 = \frac{16}{9}$, $q = \frac{2}{3}$.

654. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (x_n), если: а) $x_5 = 1\frac{1}{9}$, $q = \frac{1}{3}$; б) $x_4 = 121{,}5$, $q = -3$.

655. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 2, а пятый равен 162, если известно, что ее члены с нечетными номерами положительны, а с четными отрицательны.

656. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_2 = 6$ и $b_4 = 54$, если известно, что все ее члены положительны.

657. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, сумма первых двух членов равна 8, а сумма третьего и четвертого членов равна 72. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить в сумме 242?

П

658. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 = 0{,}012$ и $q = 0{,}2$. Запишите формулу n-го члена этой прогрессии.

659. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2^{n+2} - 2^{n-2}}{2^n}$; б) $\dfrac{25^n - 5^{2n-1}}{5^{2n}}$.

660. Решите неравенство:

а) $1{,}5x - x^2 \leqslant 0$; б) $x^2 + x + 6 > 0$.

661. Какую фигуру задает на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} 3x - y \geqslant 0, \\ y - 5 \geqslant 0? \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте определение геометрической прогрессии. Что называют знаменателем геометрической прогрессии?

2 Как выражается квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, через предыдущий и последующий члены?

3 Запишите формулы n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Для тех, кто хочет знать больше

29. Метод математической индукции

Пусть дана последовательность (a_n), в которой

$$a_1 = 4, \ a_{n+1} = a_n + 2n + 3.$$

Попытаемся задать ее формулой n-го члена.

Вычислим первые несколько членов последовательности:

$$a_1 = 4, \ a_2 = 4 + 2 \cdot 1 + 3 = 9, \ a_3 = 9 + 2 \cdot 2 + 3 = 16.$$

Значит, последовательность (a_n) начинается так: 4, 9, 16, ...

Естественно предположить, что эту последовательность можно задать формулой $a_n = (n + 1)^2$. Формула верна для $n = 1, 2, 3$. Однако, как долго ни продолжали бы мы вычисления, они не дают оснований утверждать, что эта формула верна при любом натуральном n. Поэтому воспользуемся специальным методом рассуждений. Предположим, что формула верна при $n = k$, т. е. $a_k = (k + 1)^2$, и докажем, что она также верна при $n = k + 1$, т. е. докажем, что $a_{k+1} = (k + 2)^2$.

По условию $a_{k+1} = a_k + 2k + 3$. Заменив a_k на $(k + 1)^2$, получим $a_{k+1} = (k + 1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2$.

Значит,

$$a_{k+1} = (k + 2)^2,$$

т. е. если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$.

Мы убедились, что формула верна для $n = 1$. Следовательно, она верна и для $n = 1 + 1$, т. е. для $n = 2$. Из того, что формула верна для $n = 2$, следует, что она верна и для $n = 2 + 1$, т. е. для $n = 3$. (Заметим, что в справедливости формулы для $n = 2$ и $n = 3$ нас убедили и непосредственные расчеты.) Из справедливости формулы для $n = 3$ вытекает ее справедливость для $n = 3 + 1$, т. е. для $n = 4$. Из того, что формула верна для $n = 4$, следует, что она верна для $n = 5$ и т. д.

Ясно, что, строя такую цепочку рассуждений, мы дойдем до любого натурального числа. Значит, формула $a_n = (n + 1)^2$ верна при любом натуральном n, т. е. последовательность (a_n) можно задать этой формулой.

Примененный метод доказательства называется *методом математической индукции*. Он основан на следующем положении, известном под названием *принцип математической индукции*:

> утверждение о том, что некоторый факт имеет место при любом натуральном n, верно, если выполняются два условия:
> а) утверждение верно при $n = 1$;
> б) из справедливости утверждения для $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

Доказательство некоторого утверждения методом математической индукции состоит из двух частей. Сначала проверяют его справедливость при $n = 1$. Затем, предположив, что утверждение верно при $n = k$, доказывают, что оно верно и при $n = k + 1$.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции.

Пример 1. При решении некоторых задач из геометрии и механики Архимед (287—212 гг. до н. э.) вывел формулу

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Докажем ее справедливость.

▶ При $n = 1$ формула верна:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Допустим, что эта формула верна для $n = k$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что отсюда следует ее справедливость для $n = k + 1$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Имеем

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.$$

Разложив на множители квадратный трехчлен $2k^2 + 7k + 6$, получим

$$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3).$$

Значит,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Таким образом, справедливость формулы Архимеда доказана. ◁

Пример 2. Докажем, что при любом натуральном n сумма $13^n + 5$ кратна 6.

▶ При $n = 1$ утверждение верно, так как $13^1 + 5 = 18$, а число 18 кратно 6.

Допустим, что утверждение верно при $n = k$, т. е. сумма $13^k + 5$ кратна 6, и докажем, что из этого следует его справедливость для $n = k + 1$, т. е. сумма $13^{k+1} + 5$ также кратна 6. Имеем

$$13^{k+1} + 5 = 13^k \cdot 13 + 5 = 13^k(12+1) + 5 = 13^k \cdot 12 + (13^k + 5).$$

В полученной сумме каждое слагаемое кратно 6. Значит, сумма $13^{k+1} + 5$ при любом натуральном k кратна 6. В силу принципа математической индукции утверждение доказано. ◁

Упражнения

662. Проверьте, что при $n = 1, 2, 3$ верна формула

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Докажите, что эта формула верна при любом натуральном n.

663. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

664. Докажите, что при любом натуральном n сумма

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

может быть вычислена по формуле $S_n = \frac{n}{n+1}$.

665. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$$

666. Пусть (b_n) — последовательность, в которой $b_1 = -3$, $b_{k+1} = b_k + 6k + 3$. Докажите, что эту последовательность можно задать формулой $b_n = 3n^2 - 6$.

667. Докажите, что последовательность (a_n), в которой $a_1 = -5$, $a_{k+1} = a_k + 10k + 5$, можно задать формулой $a_n = 5n^2 - 10$.

668. Докажите, что разность $49^n - 1$ кратна 48 при любом натуральном n.

669. Пусть (u_n) — последовательность чисел Фибоначчи, т. е. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ при $n > 2$. Докажите, что эта последовательность обладает следующим свойством:

а) $u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$;

б) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$.

Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 9

670. Вычислите первые пять членов последовательности (c_n), заданной формулой:

а) $c_n = -2n^2 + 7$; в) $c_n = -2{,}5 \cdot 2^n$; д) $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n}$;

б) $c_n = \frac{100}{n^2 - 5}$; г) $c_n = 3{,}2 \cdot 2^{-n}$; е) $c_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n + 1}$.

671. Задайте формулой n-го члена последовательность (a_n), если:
а) (a_n) — последовательность натуральных чисел, кратных 5;
б) (a_n) — последовательность натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

672. Вычислите первые несколько членов последовательности (y_n), если:

а) $y_1 = -3$, $y_{n+1} - y_n = 10$; в) $y_1 = 1{,}5$, $y_{n+1} - y_n = n$;

б) $y_1 = 10$, $y_{n+1} \cdot y_n = 2{,}5$; г) $y_1 = -4$, $y_{n+1} : y_n = -n^2$.

673. Найдите члены арифметической прогрессии (a_n), обозначенные буквами:

а) a_1; a_2; -19; $-11{,}5$; a_5; ... ; б) a_1; $-8{,}5$; a_3; $-4{,}5$; a_5; a_6; ... .

674. Периметр треугольника равен 24 см, причем длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Можно ли определить длину хотя бы одной из сторон? Какие целые значения могут принимать длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах?

675. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из них равен 60°.

676. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) $a_2;\ a_4;\ \dots;\ a_{2n};\ \dots;$ в) $2a_1;\ 2a_2;\ \dots;\ 2a_n;\ \dots;$

б) $a_1 - 1;\ a_2 - 1;\ \dots;\ a_n - 1;\ \dots;$ г) $a_1^2;\ a_2^2;\ \dots;\ a_n^2;\ \dots$?

677. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) a_{12}, если $a_1 = 9\sqrt{3} - 2$ и $d = 2 - \sqrt{3}$;

б) a_8, если $a_1 = \frac{5\sqrt{3} - 7}{3}$ и $d = \frac{\sqrt{3} - 2}{3}$.

678. Найдите номер члена арифметической прогрессии (a_n):

а) равного $-2{,}94$, если $a_1 = 1{,}26$ и $d = -0{,}3$;

б) равного $-9{,}7$, если $a_5 = -3{,}7$ и $d = -0{,}6$.

679. Дана арифметическая прогрессия (b_n), у которой $b_1 = 2\frac{3}{4}$ и $d = \frac{2}{5}$. Является ли членом этой прогрессии число:

а) $14\frac{3}{4}$; б) 8,35?

680. Найдите:

а) первый положительный член арифметической прогрессии $-10\frac{1}{2};\ -10\frac{1}{4};\ \dots;$

б) первый отрицательный член арифметической прогрессии $8\frac{1}{2};\ 8\frac{1}{3};\ \dots$.

681. Докажите, что если (y_n) — арифметическая прогрессия, то:

а) $y_2 + y_7 = y_4 + y_5$; б) $y_{n-5} + y_{n+10} = y_n + y_{n+5}$, где $n > 5$.

682. Докажите, что если d — разность арифметической прогрессии, а x_m и x_n — ее члены, причем $m \neq n$, то $d = \frac{x_m - x_n}{m - n}$.

683. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Найдите:

а) d, если $a_{20} = 1{,}7$ и $a_{37} = 0$; б) a_{100}, если $a_{10} = 270$ и $d = -3$.

684. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии:

а) $\frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \dots;$ б) $\sqrt{3};\ \sqrt{12};\ \dots$.

685. Найдите сумму, слагаемыми которой являются последовательные члены арифметической прогрессии:

а) $2 + 6 + 10 + \dots + 198$; б) $95 + 85 + 75 + \dots + (-155)$.

686. На одной стороне угла от вершины отложены двенадцать равных отрезков и через их концы (кроме вершины угла) проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла. Найдите сумму длин всех параллельных отрезков, заключенных между сторонами угла, если длина наименьшего из них равна 3 см.

687. В арифметической прогрессии (a_n):

а) $d = -0{,}4,\ n = 12,\ a_n = 2{,}4$; найдите a_1 и S_n;

б) $a_1 = -35,\ d = 5,\ S_n = 250$; найдите n и a_n;

в) $d = \frac{1}{2},\ a_n = 50,\ S_n = 2525$; найдите a_1 и n;

г) $a_1 = -\frac{1}{2},\ a_n = -29\frac{1}{2},\ S_n = -450$; найдите d и n.

688. Найдите разность арифметической прогрессии (x_n) и ее первый член, если $x_{10} = 1$ и $S_{16} = 4$.

689. Найдите сумму:

а) всех двузначных чисел; б) всех трехзначных чисел.

690. Найдите сумму:

а) всех натуральных четных чисел, не превосходящих 200;

б) всех натуральных нечетных чисел, не превосходящих 150;

в) всех натуральных чисел, кратных 3, заключенных в промежутке от 100 до 200.

691. Какова сумма натуральных чисел:

а) меньших 100 и не кратных 3;

б) больших 50, но меньших 150 и не кратных 5?

692. Найдите натуральное число, которое:

а) в 5 раз меньше суммы предшествующих ему натуральных чисел;

б) равно сумме предшествующих ему натуральных чисел.

693. Члены арифметической прогрессии 2; 5; ... с четными номерами заменили противоположными им числами. В результате получили последовательность (x_n). Напишите формулу n-го члена этой последовательности и найдите сумму первых пятидесяти ее членов.

694. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{2n-1}}$; б) $\dfrac{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}$.

695. Найдите:

а) сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 8,2; 7,4; ... ;

б) сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии –6,5; –6; ... .

696. Найдите сумму первых сорока членов арифметической прогрессии, если $S_{10} = 100$ и $S_{30} = 900$.

697. Найдите пятидесятый член арифметической прогрессии, если:

а) $S_{20} = 1000$, $S_{40} = 10\,000$; б) $S_5 = 0{,}5$, $S_{15} = -81$.

698. Запишите формулу суммы первых n членов последовательности (a_n), если:

а) $a_n = 2n + 1$; б) $a_n = 3 - n$.

699. Является ли последовательность (x_n) арифметической прогрессией, если сумму первых n ее членов можно найти по формуле $S_n = n^2 - 8n$? Найдите пятый член этой последовательности.

700. Является ли последовательность (x_n) арифметической прогрессией, если сумма первых n ее членов может быть найдена по формуле:

а) $S_n = -n^2 + 3n$; в) $S_n = n^2 + 2n - 8$;

б) $S_n = 2n^2 - 1$; г) $S_n = 6n + 5$?

К параграфу 10

701. Найдите обозначенные буквами члены геометрической прогрессии (b_n):

а) b_1; b_2; 225; -135; 81; b_6; ... ; б) b_1; b_2; b_3; 36; 54; ... .

702. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) $x_1 + 1$; $x_2 + 1$; ... ; $x_n + 1$; ... ; в) x_1^2; x_2^2; ... ; x_n^2; ... ;

б) $3x_1$; $3x_2$; ... ; $3x_n$; ... ; г) $\frac{1}{x_1}$; $\frac{1}{x_2}$; ... ; $\frac{1}{x_n}$; ... ?

703. Существуют ли три числа, которые составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии?

704. Является ли геометрической прогрессией последовательность (x_n), если:

а) $x_n = 2^n$; в) $x_n = n^2$;

б) $x_n = 3^{-n}$; г) $x_n = ab^n$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$?

705. Известны первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n). Найдите b_n, если:

а) $b_1 = \frac{243}{256}$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 8$; б) $b_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $q = -\sqrt{6}$, $n = 5$.

706. Первый и девятый члены геометрической прогрессии равны соответственно 135 и $\frac{5}{3}$. Найдите заключенные между ними члены этой прогрессии.

707. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Докажите, что:

а) если $b_1 > 0$ и $q > 1$, то каждый следующий член прогрессии больше предыдущего;

б) если $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$, то каждый следующий член прогрессии меньше предыдущего;

в) если $b_1 < 0$ и $q > 1$, то каждый следующий член прогрессии меньше предыдущего;

г) если $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$, то каждый следующий член прогрессии больше предыдущего.

Для каждого из рассмотренных случаев приведите пример.

708. Докажите, что если (a_n) — геометрическая прогрессия, то:

а) $a_2 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5$; б) $a_{n-3} \cdot a_{n+8} = a_n \cdot a_{n+5}$, где $n > 3$.

709. Докажите, что если b_n и b_m — члены геометрической прогрессии, знаменатель которой равен q, то $b_n = b_m q^{n-m}$.

710. В геометрической прогрессии (x_n):

а) $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$, $S_n = 20\frac{1}{3}$; найдите x_1 и x_n;

б) $x_1 = 11$, $x_n = 88$, $S_n = 165$; найдите q и n;

в) $x_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{21}{64}$; найдите n и x_n;

г) $q = \sqrt{3}$, $x_n = 18\sqrt{3}$, $S_n = 26\sqrt{3} + 24$; найдите x_1 и n.

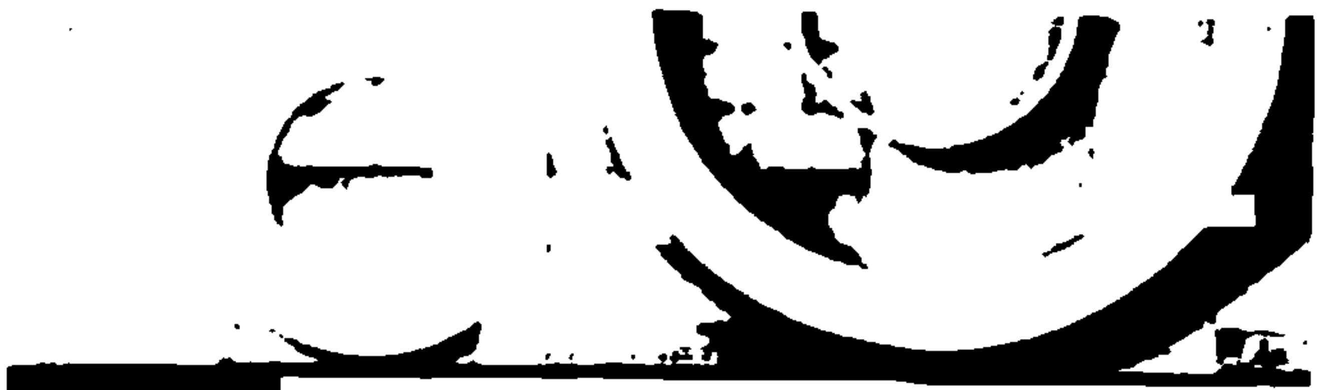
711. Сумму первых n членов последовательности (x_n) можно найти по формуле $S_n = \frac{3}{4}(5^n - 1)$. Докажите, что последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите q и x_1.

712. Геометрическая прогрессия состоит из 15 членов. Сумма первых пяти членов равна $\frac{11}{64}$, а сумма следующих пяти членов равна $-5\frac{1}{2}$. Найдите сумму последних членов этой прогрессии.

713. Упростите выражение, применив формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, где $x \neq 1$ и $x \neq 0$;

б) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$, где $x \neq -1$ и $x \neq 0$.



Глава V ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 11. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

30. Примеры комбинаторных задач

В науке и на практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют *комбинаторикой*. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать». Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и других областях знаний.

Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

Пример 1. Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека — Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет двоих для участия в соревнованиях пар. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

▶ Составим сначала все пары, в которые входит Антонов (для краткости будем писать первые буквы фамилий). Получим три пары:

АГ, АС, АФ.

Выпишем теперь пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов. Таких пар две:

ГС, ГФ.

Далее составим пары, в которые входит Сергеев, но не входят Антонов и Григорьев. Такая пара только одна: СФ.

Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Федоров, уже составлены.
Итак, мы получили шесть пар:

АГ, АС, АФ,
ГС, ГФ,
СФ.

Значит, всего существует шесть вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы. ◁

Способ рассуждений, которым мы воспользовались при решении задачи, называют *перебором возможных вариантов*.

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

▶ Чтобы ответить на вопрос задачи, выпишем все такие числа. Пусть на первом месте стоит цифра 1. На втором месте может быть записана любая из цифр 3, 5, 7. Запишем, например, на втором месте цифру 3. Тогда в качестве третьей цифры можно взять 5 или 7. Получим два числа 135 и 137. Если на втором месте записать цифру 5, то в качестве третьей цифры можно взять цифру 3 или 7. В этом случае получим числа 153 и 157. Если же, наконец, на втором месте записать цифру 7, то получим числа 173 и 175.
Итак, мы составили все числа, которые начинаются с цифры 1. Таких чисел шесть:

135, 137, 153, 157, 173, 175.

Аналогичным способом можно составить числа, которые начинаются с цифры 3, с цифры 5, с цифры 7.
Полученные результаты запишем в четыре строки, в каждой из которых по шесть чисел:

135,	137,	153,	157,	173,	175,
315,	317,	351,	357,	371,	375,
513,	517,	531,	537,	571,	573,
713,	715,	731,	735,	751,	753.

Таким образом, из цифр 1, 3, 5, 7 можно составить 24 трехзначных числа, в записи которых цифры не повторяются. ◁

Проведенный перебор вариантов проиллюстрирован на схеме, изображенной на рисунке 79. Такую схему называют *деревом возможных вариантов*.

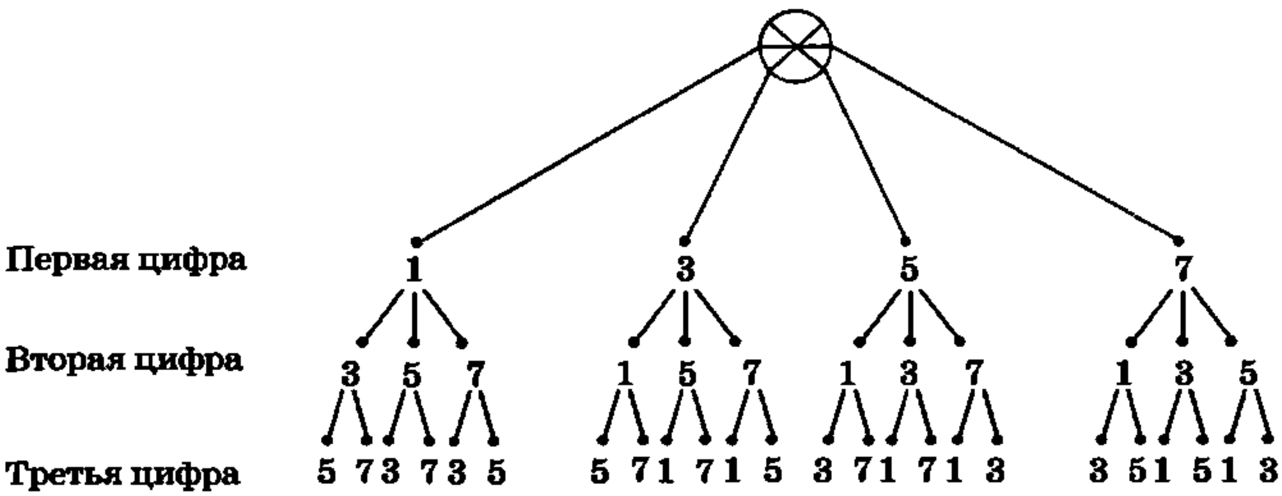


Рис. 79

Заметим, что ответ на вопрос, поставленный в примере 2, можно получить, не выписывая сами числа. Будем рассуждать так. Первую цифру можно выбрать четырьмя способами. Так как после выбора первой цифры останутся три, то вторую цифру можно выбрать уже тремя способами. Наконец, третью цифру можно выбрать (из оставшихся двух) двумя способами. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2$, т. е. 24.

Мы нашли ответ на поставленный в примере 2 вопрос, используя так называемое ***комбинаторное правило умножения.***

Сформулируем это правило в общем виде.

Пусть имеется n элементов и требуется выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n_2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n_3 способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$.

Пример 3. Из города A в город B ведут две дороги, из города B в город C — три дороги, из города C до пристани — две дороги (рис. 80). Туристы хотят проехать из города A через города B и C к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

Рис. 80

▶ Путь из A в B туристы могут выбрать двумя способами. Далее в каждом случае они могут проехать из B в C тремя способами. Значит, имеются $2 \cdot 3$ вариантов маршрута из A в C. Так как из города C на пристань можно попасть двумя способами, то всего существует $2 \cdot 3 \cdot 2$, т. е. 12, способов выбора туристами маршрута из города A к пристани. ◁

Упражнения

714. В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник — и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из первого и второго блюд, которые может заказать посетитель. Проиллюстрируйте ответ, построив дерево возможных вариантов.

715. У Ирины пять подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана. Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?

716. Стадион имеет четыре входа: A, B, C и D. Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов?

717. Укажите все способы, какими можно разложить три яблока в две вазы (учтите при этом случаи, когда одна из ваз окажется пустой).

718. Составьте все возможные двузначные числа из указанных цифр, используя в записи числа каждую из них не более одного раза:

а) 1, 6, 8; б) 0, 3, 4.

719. Из цифр 1, 2, 3 составьте все возможные двузначные числа при условии, что:

а) цифры в числе не повторяются;
б) допускается повторение цифр в числе.

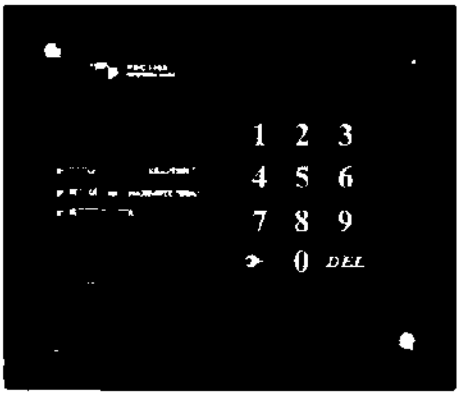
720. Используя цифры 0, 2, 4, 6, составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются.

721. В шахматном турнире участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

722. В соревнованиях по футболу участвовало 12 команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?

723. При встрече 8 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

724. Учащиеся 9 класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 24 учащихся?



725. На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0, 1, 2, ..., 8, 9. Каждая квартира получает код из двух цифр типа 0—2, 3—7, 7—3, 8—8 и т. п., позволяющий открывать входную дверь. Хватит ли кодов для всех квартир дома, если в доме 96 квартир?

726. Из села Дятлово в село Матвеевское ведут три дороги, а из села Матвеевское в село Першино — четыре дороги. Сколькими способами можно попасть из Дятлово в Першино через Матвеевское?

727. В кафе имеются три первых блюда, пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

728. Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?

729. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2 - b^2} + \dfrac{a - b}{2a + 2b}\right) \cdot \dfrac{2a}{a + b} + \dfrac{b}{b - a}$;

б) $\dfrac{y}{x - y} - \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\dfrac{x}{(x - y)^2} - \dfrac{y}{x^2 - y^2}\right)$.

730. Решите неравенство:

а) $(2{,}5x + 3)(4x - 1) - 2{,}5x(4x + 2) < 3$;

б) $(1 - 4x)^2 - (8x - 1)(2x + 1) > 0$.

731. Изобразите схематически график функции и укажите область ее значений:

а) $y = x^2 + 15$; б) $y = (x - 16)^2$; в) $y = -x^2 + 8$.

31. Перестановки

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки*.

Рассмотрим пример. Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами a, b и c. Эти книги можно расставить на полке по-разному.

Если первой поставить книгу a, то возможны такие расположения книг:

$$abc, \; acb.$$

Если первой поставить книгу b, то возможными являются такие расположения:

$$bac, \; bca.$$

И наконец, если первой поставить книгу c, то можно получить такие расположения:

$$cab, \; cba.$$

Каждое из этих расположений называют *перестановкой* из трех элементов.

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (читается «P из n»).

В рассмотренном примере мы установили, что $P_3 = 6$. Для того чтобы найти число перестановок из трех элементов, можно не выписывать эти перестановки, а воспользоваться комбинаторным правилом умножения. Будем рассуждать так. На первое место можно поставить любой из трех элементов. Для каждого выбора первого элемента есть две возможности выбора второго из оставшихся двух элементов. Наконец, для каждого выбора первых двух элементов остается единственная возможность выбора третьего элемента. Значит, число перестановок из трех элементов равно $3 \cdot 2 \cdot 1$, т. е. 6.

Выведем теперь формулу числа перестановок из n элементов. Воспользуемся тем же способом рассуждений, который был использован для нахождения P_3.

Пусть мы имеем n элементов. На первое место можно поставить любой из них. Для каждого выбора первого элемента на второе место можно поставить один из оставшихся $n - 1$ элементов. Для каждого выбора первых двух элементов на третье место можно поставить один из оставшихся $n - 2$ элементов и т. д. В результате получим, что

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Расположив множители в порядке возрастания, получим

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: $n!$ (читается «n факториал»).

Например, $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

По определению считают, что $1! = 1$.

Таким образом, число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

Пример 1. Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

▶ Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Значит, существует 40 320 способов расстановки участниц забега на восьми беговых дорожках. ◁

Пример 2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

▶ Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из них надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно P_3. Значит, искомое число четырехзначных чисел равно $P_4 - P_3$.

Получаем

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18. \ \triangleleft$$

Пример 3. Имеется девять различных книг, четыре из которых — учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

▶ Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не девять, а шесть книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6 \cdot P_4$.

Получаем

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17\,280. \ \triangleleft$$

Упражнения

732. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?

733. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

734. Сколькими способами 9 человек могут встать в очередь в театральную кассу?

735. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению $abcde$, которые получаются из него перестановкой множителей?

736. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.

737. Сколько шестизначных чисел, в записи которых каждая цифра используется только один раз, можно составить из цифр:

а) 1, 2, 5, 6, 7, 8; б) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

738. Сколько среди четырехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, 9 (без их повторения), таких, которые: а) начинаются с цифры 3; б) кратны 15?

739. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 (без их повторения).

740. Сколько чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 (без их повторения), таких, которые: а) больше 3000; б) больше 2000?

741. Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций, если:

а) Олег должен находиться в конце ряда;
б) Олег должен находиться в начале ряда, а Игорь — в конце ряда;
в) Олег и Игорь должны стоять рядом.

742. В расписании на понедельник шесть уроков: русский язык, алгебра, геометрия, биология, история, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

743. Сколько существует перестановок букв слова «конус», в которых буквы «к», «о», «н» стоят рядом в указанном порядке?

744. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг — это сборники стихов, так, чтобы сборники стихов стояли рядом в произвольном порядке?

745. Сколькими способами 5 мальчиков и 5 девочек могут занять в театре в одном ряду места с 1-го по 10-е? Сколькими способами они могут это сделать, если мальчики будут сидеть на нечетных местах, а девочки — на четных?

746. Делится ли число 30! на:

а) 90; б) 92; в) 94; г) 96?

747. Делится ли число 14! на:

а) 168; б) 136; в) 147; г) 132?

748. Найдите значение выражения:

а) $\frac{15!}{14!}$; б) $\frac{8!}{10!}$; в) $\frac{42!}{40!}$; г) $\frac{16!}{14! \cdot 3!}$; д) $\frac{28!}{4! \cdot 26!}$; е) $\frac{45!}{43! \cdot 3!}$.

749. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{12!}{9!}$; б) $\frac{14!}{12!}$; в) $\frac{30!}{29! \cdot 2!}$; г) $\frac{36!}{2! \cdot 34!}$; д) $\frac{15!}{2! \cdot 16!}$; е) $\frac{25!}{23! \cdot 5!}$.

750. Что больше и во сколько раз:

а) $6! \cdot 5$ или $5! \cdot 6$; б) $(n + 1)! \cdot n$ или $n! \cdot (n + 1)$?

П

751. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a-3}{a^2-3a+9} - \frac{6a-18}{a^3+27}\right) : \frac{5a-15}{4a^3+108}$; б) $\frac{ab^2-a^2b}{a+b} \cdot \frac{a+\frac{ab}{a-b}}{a-\frac{ab}{a+b}}$.

752. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 7 - 3x - 4(3 - 1{,}5x) < 0, \\ -6(1 + 2{,}5x) - 10x - 4 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(1{,}5x - 1) - (x + 4) \geqslant 0, \\ -(2 - x) - 0{,}75x \leqslant 0. \end{cases}$

753. Пересекаются ли парабола $y = x^2 - 6x$ и прямая $y - 8x = 0$? Если да, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте ответ с помощью схематического рисунка.

32. Размещения

Пусть имеется 4 шара и 3 пустые ячейки. Обозначим шары буквами a, b, c, d. В каждую ячейку можно поместить по одному шару из этого набора. Если мы поместим шар a в первую ячейку, шар b во вторую ячейку, а шар c в третью ячейку, то получим одну из возможных упорядоченных троек шаров:

a	b	c

Выбирая по-разному шары для первой, второй и третьей ячеек, будем получать различные упорядоченные тройки шаров, например:

a	c	b

b	a	c

d	c	b

Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из четырех элементов, называют *размещением* из четырех элементов по три.

Размещением из n элементов по k ($k \leqslant n$) называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.

Таким образом, два размещения из n элементов по k считаются различными, если они различаются самими элементами или порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k (читается: «A из n по k»).

Составим из элементов a, b, c, d все размещения по три элемента. Выпишем сначала те размещения, которые начинаются с элемента a, затем те, которые начинаются с элемента b, с элемента c, с элемента d. В результате получим:

$$abc,\ abd,\ acb,\ acd,\ adb,\ adc,$$
$$bac,\ bad,\ bca,\ bcd,\ bda,\ bdc,$$
$$cab,\ cad,\ cba,\ cbd,\ cda,\ cdb,$$
$$dab,\ dac,\ dba,\ dbc,\ dca,\ dcb.$$

Из составленной таблицы видно, что $A_4^3 = 24$.

Число размещений из четырех элементов по три можно найти, не выписывая самих размещений. Будем рассуждать так. Первый элемент можно выбрать четырьмя способами, так как им может быть любой из четырех элементов. Для каждого выбранного первого элемента можно тремя способами выбрать из трех оставшихся второй элемент. Наконец, для каждых первых двух элементов можно двумя способами выбрать из двух оставшихся третий элемент. В результате получаем, что $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$, т. е. $A_4^3 = 24$.

С помощью тех же рассуждений нетрудно подсчитать, сколько можно составить размещений из n элементов по k при $k < n$. Первый элемент можно выбрать n способами. Так как после этого остается $n - 1$ элементов, то для каждого выбора первого элемента можно $n - 1$ способами выбрать второй элемент. Далее, для каждого выбора первых двух элементов можно $n - 2$ способами выбрать третий элемент (из $n - 2$ оставшихся) и т. д. Наконец, для каждого выбора первых $k - 1$ элементов можно $n - (k - 1)$ способами выбрать k-й элемент (из $n - (k - 1)$ оставшихся).

Значит,

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n - (k-1)), \text{ т. е.}$$
$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1).$$

Умножим и разделим правую часть этого равенства на $(n-k)!$:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!}.$$

Заменив $(n-k)!$ произведением $1\cdot 2\cdot 3\cdot ... \cdot(n-k)$ и расположив множители в порядке возрастания, получим

$$A_n^k = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ... \cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot ... \cdot(n-1)n}{(n-k)!}.$$

В числителе дроби записано произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Это произведение равно $n!$. Значит,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Мы получили формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k при $k < n$. Формула верна и в том случае, когда $k = n$, если условиться считать по определению, что $0! = 1$.

Заметим, что размещения из n элементов по n отличаются друг от друга только порядком элементов, т. е. представляют собой перестановки из n элементов.

В этом случае по формуле числа размещений получаем, что

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!}, \text{ т. е. } A_n^n = n!.$$

Мы пришли к уже известной формуле числа перестановок.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Учащиеся 2 класса изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

▶ Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо набором предметов, либо порядком их следования. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 9 элементов по 4. Имеем

$$A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 3024.$$

Итак, мы нашли, что расписание можно составить 3024 способами. ◁

Пример 2. Сколько трехзначных чисел (без повторения цифр в записи числа) можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

▶ Если среди семи цифр нет нуля, то число трехзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из этих цифр, равно числу размещений из 7 элементов по 3. Однако среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 надо исключить те, у которых первым элементом является цифра 0. Их число равно числу размещений из 6 элементов по 2.

Значит, искомое число трехзначных чисел равно $A_7^3 - A_6^2$. Получаем

$$A_7^3 - A_6^2 = \frac{7!}{4!} - \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 - 5 \cdot 6 = 180.$$

Из данных цифр можно составить 180 трехзначных чисел (без повторения цифр). ◁

Упражнения

754. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

755. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

756. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

757. Сколькими способами тренер может определить, кто из 12 спортсменок, готовых к участию в эстафете 4×100 м, побежит на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

758. В круговой диаграмме круг разбит на 5 секторов. Секторы решили закрасить разными красками, взятыми из набора, содержащего 10 красок. Сколькими способами это можно сделать?

759. Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?

760. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места:

а) 2 фотографии; б) 4 фотографии; в) 6 фотографий?

761. На плоскости отметили 5 точек. Их надо обозначить латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать (в латинском алфавите 26 букв)?

762. Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр:

а) 1, 3, 5, 7, 9; б) 0, 2, 4, 6, 8?

763. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля?

764. Сколько можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (без их повторения) различных трехзначных чисел, которые являются:

а) четными; б) кратными 5?

765. Решите двойное неравенство:

а) $-2 < \frac{4x-1}{5} < 2$; б) $0,2 \leqslant \frac{1-5x}{20} \leqslant 0,4$.

766. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3y - 2x = 10, \\ 7x + 5y = 27; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0,4x - 0,2y = 0,4, \\ x + 11y = 12,5. \end{cases}$

767. Найдите значение выражения:

а) $\frac{8!}{6! \cdot 2!}$; б) $\frac{12!}{9! \cdot 3!}$; в) $\frac{7! \cdot 5!}{8! \cdot 4!}$.

33. Сочетания

Пусть имеются пять гвоздик разного цвета. Обозначим их буквами a, b, c, d, e. Требуется составить букет из трех гвоздик. Выясним, какие букеты могут быть составлены.

Если в букет входит гвоздика a, то можно составить такие букеты:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade.$$

Если в букет не входит гвоздика a, но входит гвоздика b, то можно получить такие букеты:

$$bcd,\ bce,\ bde.$$

Наконец, если в букет не входит ни гвоздика a, ни гвоздика b, то возможен только один вариант составления букета:

$$cde.$$

Мы указали все возможные способы составления букетов, в которых по-разному сочетаются три гвоздики из данных пяти. Говорят, что мы составили все возможные *сочетания* из 5 элементов по 3.

> Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k (читается: «C из n по k»).

В рассмотренном примере, составив все сочетания из 5 элементов по 3, мы нашли, что $C_5^3 = 10$.

Выведем формулу числа сочетаний из n элементов по k, где $k \leqslant n$.

Выясним сначала, как C_5^3 выражается через A_5^3 и P_3. Мы нашли, что из 5 элементов можно составить следующие сочетания по 3 элемента:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade,\ bcd,\ bce,\ bde,\ cde.$$

В каждом сочетании выполним все перестановки. Число перестановок из трех элементов равно P_3. В результате получим все возможные комбинации из 5 элементов по 3, которые различаются либо самими элементами, либо порядком элементов, т. е. все размещения из 5 элементов по 3. Всего мы получим A_5^3 размещений.

Значит,

$$C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3.$$

Отсюда

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}.$$

Аналогично будем рассуждать в общем случае. Допустим, что имеется множество, содержащее n элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по k элементов. Число таких сочетаний равно C_n^k. В каждом сочетании можно выполнить P_k перестановок. В результате мы получим все размещения, которые можно составить из n элементов по k. Их число равно A_n^k.

Значит,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Пользуясь тем, что $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, где $k \leqslant n$, находим, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Мы получили формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k при любом $k \leqslant n$.

Приведем примеры.

Пример 1. Из набора, состоящего из 15 красок, надо выбрать 3 краски для окрашивания шкатулки. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

▶ Каждый выбор трех красок отличается от другого хотя бы одной краской. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3.

Имеем

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Следовательно, 3 краски можно выбрать 455 способами. ◁

Пример 2. В классе учатся 12 мальчиков и 10 девочек. Для уборки территории около школы требуется выделить трех мальчиков и двух девочек. Сколькими способами это можно сделать?

▶ Выбрать трех мальчиков из 12 можно C_{12}^3 способами, а двух девочек из 10 можно выбрать C_{10}^2 способами. Так как при каждом выборе мальчиков можно C_{10}^2 способами выбрать девочек, то сделать выбор учащихся, о котором говорится в задаче, можно $C_{12}^3 \cdot C_{10}^2$ способами.

Имеем

$$C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 220 \cdot 45 = 9900.$$

Значит, выбор учащихся для уборки территории можно сделать 9900 способами. ◁

Упражнения

768. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

769. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

770. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

771. На плоскости отмечено 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

772. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку;
б) заведующий лабораторией должен остаться?

773. На полке стоит 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если:
а) словарь нужен ему обязательно;
б) словарь ему не нужен?

774. Бригада, занимающаяся ремонтом школы, состоит из 12 маляров и 5 плотников. Из них для ремонта физкультурного зала надо выделить 4 маляров и 2 плотников. Сколькими способами можно это сделать?

775. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

В задачах 776—782 рассматриваются различные комбинации элементов (перестановки, размещения, сочетания).

776. Сколько среди всех перестановок букв слова «высота» таких, которые:

а) начинаются с буквы «в»;

б) начинаются с буквы «а», а оканчиваются буквой «т»?

777. Пять мальчиков и четыре девочки хотят сесть на девятиместную скамейку так, чтобы каждая девочка сидела между двумя мальчиками. Сколькими способами они могут это сделать?

778. Из 12 солдат, в число которых входят Иванов и Петров, надо отправить в наряд трех человек. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) Иванов и Петров должны пойти в наряд обязательно;

б) Иванов и Петров должны остаться;

в) Иванов должен пойти в наряд, а Петров — остаться?

779. В шахматном кружке занимаются 16 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них для предстоящего турнира:

а) команду из четырех человек;

б) команду из четырех человек, указав при этом, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвертой досках?

780. Номер машины в некотором городе составляют из двух различных букв, взятых из набора М, Н, К, Т, С, и трех различных цифр. Сколько машин можно обеспечить такими номерами?

781. Максим подсчитал, что существует 378 способов выбора из их класса двух дежурных. Сколько учащихся в этом классе?

782. Из группы туристов четырех дежурных можно выбрать в 13 раз большим числом способов, чем двух дежурных. Сколько туристов в группе?

П

783. Постройте график функции $y = -2x^2 + 8$.

784. Решите неравенство:

а) $x^2 - 0{,}5x - 5 < 0$; б) $x^2 - 2x + 12{,}5 > 0$.

785. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 240; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65, \\ 2x - y = 15. \end{cases}$

786. Решите уравнение: а) $5\sqrt{x} = 1$; б) $\sqrt{x - 4} = 15$.

Контрольные вопросы

1. Объясните, как ведется подсчет числа возможных вариантов с помощью комбинаторного правила умножения.
2. Что означает запись $n!$? Найдите значение выражения $\frac{49!}{47! \cdot 3!}$.
3. Что называется перестановкой из n элементов? Запишите формулу для вычисления числа перестановок из n элементов.
4. Что называется размещением из n элементов по k? Запишите формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k.
5. Что называется сочетанием из n элементов по k? Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k.

§ 12. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

34. Относительная частота случайного события

В повседневной жизни, в практической и научной деятельности часто наблюдают те или иные явления, проводят определенные эксперименты. В процессе наблюдения или эксперимента приходится встречаться с некоторыми *случайными событиями*, т. е. такими событиями, которые могут произойти или не произойти. Например, выпадение орла или решки при подбрасывании монеты, поражение мишени или промах при выстреле, выигрыш спортивной команды во встрече с соперником, проигрыш или ничейный результат — все это случайные события.

Закономерности случайных событий изучает специальный раздел математики, который называется *теорией вероятностей*. Методы теории вероятностей применяются в информатике, физике, астрономии, биологии, медицине и во многих других областях знаний.

ЯКОБ БЕРНУЛЛИ (1654—1705) — швейцарский ученый, занимавшийся различными вопросами математики и ее приложениями. Он впервые доказал теорему, устанавливающую связь между вероятностью события и частотой его появления («закон больших чисел»), имеющую важное значение в теории вероятностей и ее приложении.

Зарождение теории вероятностей произошло в поисках ответа на вопрос: как часто наступает то или иное событие в большой серии происходящих в одинаковых условиях испытаний со случайными исходами?

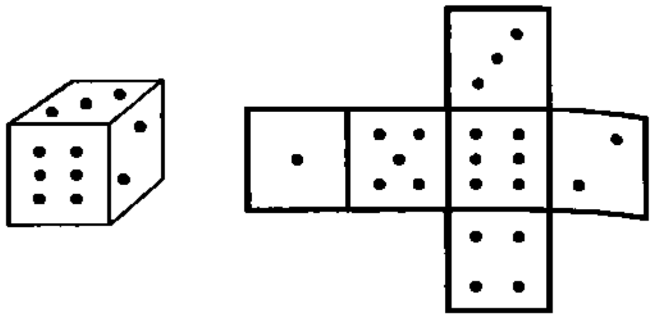


Рис. 81

Рассмотрим пример. Провели такие испытания. Бросали 100 раз игральный кубик, т. е. небольшой куб, на гранях которого выбиты очки от одного до шести (рис. 81), и наблюдали, сколько раз на верхней грани кубика выпадет шесть очков. При бросании игрального кубика на его верхней грани может выпасть одно, два, три, четыре, пять или шесть очков. Каждое из этих шести событий, или, как говорят, шести исходов испытания, является случайным. Допустим, что в данной серии экспериментов «шестерка» выпала 17 раз. Число 17, которое показывает, сколько раз в этом испытании произошло рассматриваемое событие, называют *частотой* этого события, а отношение частоты к общему числу испытаний, равное $\frac{17}{100}$, называют *относительной частотой* этого события.

Вообще пусть определенное испытание проводится многократно в одних и тех же условиях и при этом каждый раз фиксируется, произошло или нет интересующее нас событие A. Обозначим буквой n общее число испытаний, а буквой m число испытаний, при которых произошло событие A. Число m называют частотой события A, а отношение $\frac{m}{n}$ — относительной частотой.

Относительной частотой случайного события в серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу всех испытаний.

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ (1903–1987) — русский математик, работы которого относятся ко многим разделам математики и ее приложений — математическому анализу, теории вероятностей, топологии, механике, теории дифференциальных уравнений. Им построена современная система аксиоматического обоснования теории вероятностей, проведены исследования по статистическим методам контроля массовой продукции.

В ходе статистических исследований установлено, что при многократном повторении некоторых опытов или наблюдений в одних и тех же условиях относительная частота появления ожидаемого события может оставаться примерно одинаковой, незначительно отличаясь от некоторого числа p. Ясно, что число p зависит от того случайного события, относительная частота которого подсчитывается.

Рассмотрим такой пример. Подбрасывают монету и отмечают, упадет она кверху орлом или решкой. Если монета однородна и имеет правильную геометрическую форму, то шансы выпадения орла или решки одинаковы. При небольшом числе испытаний выпадение, например, орла может, произойти чаще, чем выпадение решки. Однако если эти испытания проводятся большое число раз, то относительная частота выпадения орла близка к относительной частоте выпадения решки.

Многие исследователи проводили испытания с бросанием монеты и вычисляли относительную частоту выпадения орла. Например, английский ученый К. Пирсон (1857—1936) бросал монету 24 000 раз, в этом испытании относительная частота выпадения орла была равна 0,5005, а наш соотечественник В. И. Романовский (1879—1954), подбрасывая монету 80 640 раз, нашел, что относительная частота выпадения орла в его испытании была равна 0,4923.

Аналогичные опыты проводили и другие ученые. Оказалось, что каждый раз относительная частота выпадения орла незначительно отличалась от $\frac{1}{2}$.

Говорят, что вероятность события «выпал орел при подбрасывании однородной монеты, имеющей правильную геометрическую форму», равна $\frac{1}{2}$.

Вообще если в длинной серии одинаковых экспериментов со случайными исходами значения относительных частот появления одного и того же события близки к некоторому определенному числу, то это число принимают за вероятность данного случайного события.

Такой подход к вычислению вероятностей называют *статистическим подходом*.

Вероятность случайного события оценивают, когда в ходе статистического исследования анализируют относительную частоту наступления этого события при многократном повторении в одних и тех же условиях эксперимента или наблюдения. Так, например, поступают, когда хотят определить ожидаемую всхожесть семян некоторого растения, предсказать результат выступления спортсмена в соревнованиях по стрельбе и т. п.

Упражнения

787. В партии из 1000 деталей отдел технического контроля обнаружил 12 нестандартных деталей. Какова относительная частота появления нестандартных деталей?

788. В 2006 г. в городе Дмитрове в июле и августе было 46 солнечных дней. Какова относительная частота солнечных дней в указанные два месяца?

789. Выберите какой-нибудь текст, содержащий 150 слов. Подсчитайте число слов, составленных из шести букв. Найдите относительную частоту появления слов, которые составлены из шести букв.

790. Выберите 7 строк произвольного текста. Проведя подсчет букв, найдите относительную частоту появления буквы: а) «о»; б) «е»; в) «а»; г) «ю».

791. Согласно некоторым исследованиям по изучению вероятности появления различных букв в художественных классических текстах, относительная частота появления буквы «в» равна 0,038, буквы «м» — 0,026.

Ниже приведен отрывок из поэмы А. С. Пушкина «Руслан и Людмила»:

У лукоморья дуб зеленый;
Златая цепь на дубе том:
И днем и ночью кот ученый
Все ходит по цепи кругом;
Идет направо — песнь заводит,
Налево — сказку говорит.
Там чудеса: там леший бродит,
Русалка на ветвях сидит.

Найдите относительную частоту появления в этом тексте:

а) буквы «в»; б) буквы «м».

Сравните полученные результаты с вышеперечисленными данными.

792. Проделайте дома такой опыт: подбросьте 50 раз монету достоинством 1 р. и подсчитайте, сколько раз выпадет орел. Запишите результаты в тетрадь. В классе подсчитайте, сколько всеми учениками было проведено опытов и каково общее число выпадений орла. Вычислите относительную частоту выпадения орла при бросании монеты.

793. Отмечая число попаданий в цель в каждой серии из 50 выстрелов, которые производил стрелок, получили такие данные:

38, 40, 42, 40, 39, 42, 43, 45, 40.

Какова относительная частота попаданий в цель этим стрелком в каждой серии выстрелов? Какое предположение о вероятности попадания в цель для этого стрелка можно сделать?

794. Готовясь к соревнованиям, баскетболист совершил 16 штрафных бросков, при этом мяч 9 раз попал в корзину. Можно ли утверждать, что для данного баскетболиста вероятность попадания мяча в корзину при выбрасывании штрафных очков равна $\frac{9}{16}$?

795. Многократная проверка показала, что всхожесть семян огурцов определенного сорта равна 0,9. Посадили 85 семян этого сорта. Какое предположение можно сделать о числе проросших семян?

796. Найдите область определения и область значений функции:

а) $f(x) = x^2 - 10x - 17$; б) $g(x) = \frac{1}{|x| - x}$.

797. Решите неравенство:

а) $4x - 5x^2 < 0$; б) $9x^2 \leqslant -5x$; в) $6x^2 - x - 35 > 0$.

35. Вероятность равновозможных событий

Для того чтобы оценить вероятность интересующего нас события путем статистического исследования, необходимо провести большое число опытов или наблюдений, и только после этого можно определить приближенно вероятность этого события. В то же время в ряде случаев вероятность события можно оценить непосредственно из условий самого опыта или наблюдения путем рассуждений, не прибегая к испытаниям.

Вернемся к примеру с бросанием игрального кубика. Если кубик имеет правильную форму и сделан из однородного материала, то при его бросании шансы выпадения на его верхней грани каждого числа очков от 1 до 6 одинаковы, т. е. нет оснований считать, что какой-нибудь из исходов более возможен, чем остальные. Говорят, что существует 6 *равновозможных исходов* опыта с бросанием кубика: выпадение 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков.

Вообще исходы в определенном опыте или наблюдении считают равновозможными, если шансы этих исходов одинаковы.

Исходы, при которых происходит некоторое событие, называются *благоприятными исходами* для этого события.

Рассмотрим событие B, которое означает выпадение на кубике числа очков, кратного 3. Это событие происходит лишь при двух исходах испытания: когда выпало 3 очка и когда выпало 6 очков, т. е. для события B благоприятными являются два исхода из шести равновозможных исходов.

Отношение числа благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов в рассматриваемом примере равно $\frac{2}{6}$. Это отношение считают вероятностью события B и пишут:

$$P(B) = \frac{2}{6}.$$

Обозначение P происходит от французского слова *probabilité*, что означает «вероятность».

Вообще

если все исходы какого-либо испытания равновозможны, то вероятность события в этом испытании равна отношению числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов.

В отличие от статистического подхода к вычислению вероятности такой подход называется *классическим*.

Что означает на практике, что вероятность рассмотренного события B равна $\frac{2}{6}$? Разумеется, это не означает, что при шести бросках кубика число очков, кратное 3, выпадет ровно 2 раза. Возможно, что оно выпадет 1 раз, 3 раза, не выпадет совсем. Однако если провести большое число испытаний, то относительная частота появления события B будет мало отличаться от $\frac{2}{6}$, т. е. от $\frac{1}{3}$. Вообще при увеличении числа испытаний со случайными исходами относительная частота появления случайного события приближается к его вероятности.

Сопоставляя статистический и классический подходы к вычислению вероятностей, можно сделать вывод, что статистический подход предполагает фактическое проведение испытания, а при классическом подходе не требуется, чтобы испытание было проведено в действительности.

Для того чтобы найти вероятность некоторого события (при классическом подходе), надо правильно определить число равновозможных исходов испытания и число благоприятных для этого события исходов.

Задача. Найдем вероятность того, что при подбрасывании двух монет на обеих монетах выпадет решка.

▶ При одновременном бросании двух монет равновозможными являются следующие исходы:
— на обеих монетах выпадет орел;
— на первой монете выпадет орел, а на второй — решка;
— на первой монете выпадет решка, а на второй — орел;
— на обеих монетах выпадет решка.

Благоприятным для события A, состоящего в том, что на обеих монетах выпадет решка, является один исход из четырех возможных, значит, $P(A) = \frac{1}{4}$. ◁

При решении этой задачи было бы ошибкой считать, что в данном опыте имеются три равновозможных исхода:
— на обеих монетах выпадет орел;
— на одной монете выпадет орел, а на другой — решка;
— на обеих монетах выпадет решка.

Отсюда следовал бы неверный вывод, что $P(A) = \frac{1}{3}$.

Приведем примеры вычисления вероятностей.

Пример 1. Из 25 экзаменационных билетов по геометрии ученик успел подготовить 11 первых и 8 последних билетов. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется билет, который он не подготовил?

▶ Общее число равновозможных исходов при выборе билетов на экзамене 25. Пусть M — событие, заключающееся в том, что ученику достанется на экзамене билет, к которому он не подготовился. Число благоприятных для события M исходов (но не для ученика) равно 25 – (11 + 8), т. е. 6. Значит,

$$P(M) = \frac{6}{25} = 0{,}24. \triangleleft$$

Пример 2. Антон и Игорь бросают белый и черный игральные кубики и подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что если при очередном бросании в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Антон, а если в сумме выпадет 7 очков, то выигрывает Игорь. Можно ли считать, что шансы выиграть в этой игре у мальчиков одинаковы?

▶ При бросании кубиков на белом кубике может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Каждому числу очков, выпавших на белом кубике, соответствует шесть вариантов числа очков, выпавших на черном кубике. Все исходы этого испытания приведены в таблице:

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

В каждой паре на первом месте записано число очков, выпавших на белом кубике, а на втором месте — число очков, выпавших на черном кубике. Указанные исходы испытания равновозможны. Общее число равновозможных исходов равно 36. Пусть событие A означает, что при бросании кубиков в сумме выпало 8 очков, а событие B означает, что в сумме выпало 7 очков.

Для события A благоприятными являются 5 исходов:

(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2).

Для события B благоприятными являются 6 исходов:

$$(1;\ 6),\ (2;\ 5),\ (3;\ 4),\ (4;\ 3),\ (5;\ 2),\ (6;\ 1).$$

Отсюда

$$P(A) = \frac{5}{36},\ P(B) = \frac{6}{36}.$$

Поэтому шансов выиграть у Игоря больше, чем у Антона. ◁

Пример 3. Из 16 собранных велосипедов 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

▶ Пусть A — событие, при котором 2 выбранных велосипеда окажутся без дефектов. Любой выбор двух велосипедов из 16 является равновозможным исходом. Значит, общее число равновозможных исходов равно числу сочетаний из 16 по 2, т. е. C_{16}^2. Исходом, благоприятным для события A, является выбор двух исправных велосипедов из имеющихся 12 исправных $(16 - 4 = 12)$. Следовательно, число благоприятных для события A исходов равно C_{12}^2. Отсюда получаем, что

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{16}^2}.$$

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66,\quad C_{16}^2 = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120,$$

$$P(A) = \frac{66}{120} = 0{,}55.\ \triangleleft$$

Пример 4. Группа туристов, в которой 7 юношей и 4 девушки, выбирает по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

▶ Число исходов при выборе четырех дежурных равно C_{11}^4. Все эти исходы равновозможны.

Пусть A — событие, при котором выбраны 2 юноши и 2 девушки. Выбрать 2 юношей из 7 можно C_7^2 способами, а выбрать 2 девушек из 4 можно C_4^2 способами. Каждому выбору двух юношей соответствует C_4^2 выборов 2 девушек. Значит, число исходов, благоприятных для события A, равно $C_7^2 \cdot C_4^2$. Отсюда получаем, что

$$P(A) = \frac{C_7^2 \cdot C_4^2}{C_{11}^4}.$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21,\quad C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6,$$

$$C_{11}^4 = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 330,$$

$$P(A) = \frac{21 \cdot 6}{330} = \frac{21}{55}.\ \triangleleft$$

Введем теперь понятия достоверного и невозможного событий.

Событие, которое при проведении некоторого опыта или наблюдения происходит всегда, называют *достоверным событием*.

Пусть C — событие, состоящее в том, что при бросании игрального кубика выпадет менее 7 очков. Это событие является достоверным. Каждый из исходов 1, 2, 3, 4, 5, 6 является благоприятным для события C. Значит, вероятность наступления события C равна:

$$P(C) = \frac{6}{6} = 1.$$

Вообще вероятность достоверного события равна 1.

Событие, которое не может произойти ни при каком исходе опыта или наблюдения, называют *невозможным событием*.

Обозначим буквой F событие, означающее, что при бросании игрального кубика выпадает 7 очков. Очевидно, что это событие произойти не может. Число благоприятных для него исходов равно нулю, т. е. $P(F) = \frac{0}{6} = 0$.

Вообще вероятность невозможного события равна 0.

Пусть некоторое испытание имеет n равновозможных исходов, из которых m исходов благоприятны для события A. Тогда $P(A) = \frac{m}{n}$. Так как $m \leqslant n$, то $\frac{m}{n} \leqslant 1$, т. е. $P(A) \leqslant 1$. С другой стороны, всегда $P(A) \geqslant 0$. Следовательно, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

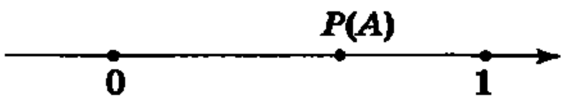


Рис. 82

Это можно проиллюстрировать с помощью вероятностной шкалы (рис. 82).

Точкой 0 изображается вероятность невозможного события, а точкой 1 — вероятность достоверного события. Если событие A не является ни невозможным, ни достоверным событием, то $P(A)$ изображается точкой, расположенной между 0 и 1. Чем меньше вероятность наступления события A, тем ближе к 0 расположена точка $P(A)$. Чем больше вероятность наступления события A, тем ближе к 1 расположена точка $P(A)$.

Вероятность случайного события иногда удается найти, используя геометрические соображения.

Рассмотрим такой пример. Участники игры поочередно бросают в мишень дротики (специальные стрелы). Мишень представляет собой круг, в котором выделены малый круг и кольцевая зона, причем радиус малого круга вдвое меньше радиуса большого круга (рис. 83).

Найдем вероятность того, что при попадании дротика в мишень точка попадания окажется в кольцевой зоне.

Будем считать, что попадание дротика в любую точку мишени равновозможно и вероятность попадания дротика в какую-либо область прямо пропорциональна площади этой области.

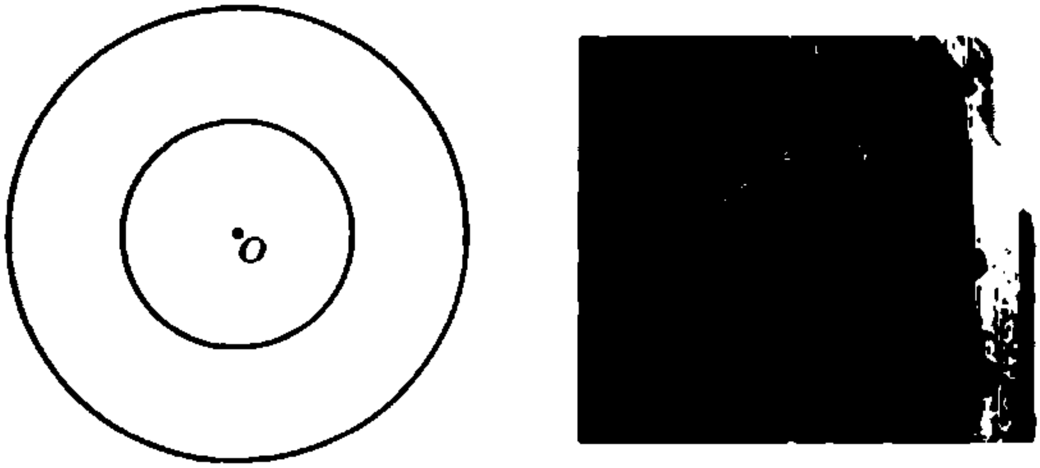


Рис. 83

Пусть радиус большого круга, представляющего собой мишень, равен R, тогда радиус центрального круга равен $\frac{R}{2}$. Площадь мишени равна πR^2, а площадь центрального круга равна $\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$, т. е. $\frac{\pi R^2}{4}$. Значит, площадь кольцевой зоны равна $\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3\pi R^2}{4}$. Вероятность того, что точка попадания дротика окажется в кольцевой зоне, равна отношению площади кольцевой зоны к площади мишени, т. е. равна $\frac{\frac{3}{4}\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$.

Упражнения

798. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

799. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет:
а) 1 очко; б) более 4 очков?

800. Ученик записал в тетради произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа окажется равной 6?

801. В кооперативном доме 93 квартиры, из которых 3 находятся на первом этаже, а 6 — на последнем. Квартиры распределяются по жребию. Какова вероятность того, что жильцу не достанется квартира, расположенная на первом или на последнем этаже?

802. Какова вероятность того, что при бросании двух кубиков сумма выпавших на них очков равна 3?

803. Андрей и Олег договорились, что если при бросании двух игральных кубиков в сумме выпадет число очков, кратное 5, то выигрывает Андрей, а если в сумме выпадет число очков, кратное 6, то выигрывает Олег. У кого из мальчиков больше шансов выиграть?

804. Набирая номер телефона, состоящий из 7 цифр, абонент забыл, в какой последовательности идут 3 последние цифры. Помня лишь, что это цифры 1, 5 и 9, он набрал первые четыре цифры, которые знал, и наугад комбинацию из цифр 1, 5 и 9. Какова вероятность того, что абонент набрал верный номер?

805. Чтобы открыть сейф, надо набрать в определенной последовательности пять цифр (без их повторения): 1, 2, 3, 4 и 5. Какова вероятность того, что если набирать цифры в произвольном порядке, то сейф откроется?

806. На четырех карточках написаны буквы «о», «т», «к», «р». Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно одну за другой эти карточки и положили их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «крот»?

807. В коробке лежат только красные и синие карандаши. Рассматриваются следующие события:

A — из коробки вынут красный карандаш;
B — из коробки вынут синий карандаш;
C — из коробки вынут цветной карандаш;
D — из коробки вынут желтый карандаш.

Вероятность какого из этих событий равна 0; равна 1; больше 0, но меньше 1?

808. Закинул старик в море невод. Рассматриваются следующие события:

A — пришел невод с уловом рыбы;
B — пришел невод с одною тиной;
C — пришел невод с травой морскою;
D — пришел невод с золотою рыбкой, которая голосом молвит человечьим.

Есть ли среди данных событий такие, вероятность которых равна 0; равна 1; больше 0, но меньше 1?

809. В ящике находится 10 деталей, одна из которых нестандартная. Наугад берут 2 детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся стандартными?

810. Четыре билета на елку распределили по жребию между 15 мальчиками и 12 девочками. Какова вероятность того, что билеты достанутся 2 мальчикам и 2 девочкам?

811. В коробке лежит 8 красных карандашей и 4 синих. Из коробки наугад вынимают 5 карандашей. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся красными, а 2 — синими?

812. На полке стоит 12 книг, из которых 4 — это учебники. С полки наугад снимают 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

813. Три подруги Аня, Вера и Маша отправились в театр. Получив в гардеробе номерки за три сданных пальто, они сложили их вместе. По окончании спектакля каждая из подруг взяла наугад один номерок и получила по нему пальто. Какова вероятность того, что:

а) только Аня получила свое пальто;
б) Вера не получила своего пальто?

814. В треугольнике ABC проведен отрезок DE, параллельный AB (рис. 84). Известно, что $DE = \frac{1}{3}AB$. Какова вероятность того, что случайным образом выбранная точка треугольника ABC окажется принадлежащей треугольнику CDE?

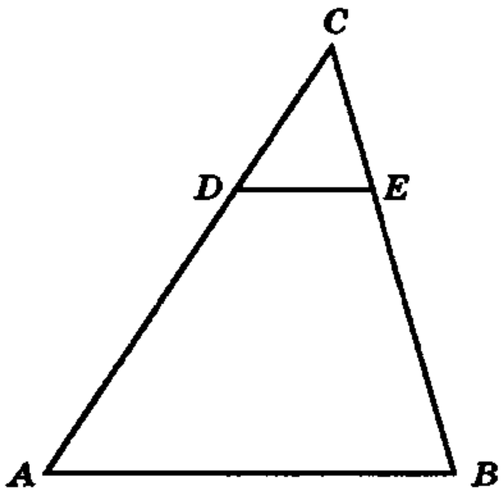


Рис. 84

815. Пункты A и B находятся друг от друга на расстоянии 2,5 км. Телефонная линия, соединяющая эти пункты, оборвалась в неизвестном месте. Какова вероятность того, что точка разрыва удалена от точки A не более чем на 500 м?

816. На координатной прямой отмечены точки $A(0)$ и $B(3)$. На отрезке AB наугад выбрана точка $C(x)$. Какова вероятность того, что $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$?

П

817. Упростите выражение:

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{b^2-a^2} : \left(1 - \frac{1+b}{b}\right).$$

818. Пересекаются ли парабола $y = 2x^2 - 6x$ и прямая $y = 10x$? Если да, то укажите координаты точек пересечения.

819. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x-5} - \frac{4}{x+5} + \frac{76}{25-x^2} = 0$; б) $\frac{7x}{x^2-36} + \frac{3}{6-x} = \frac{7}{x+6}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется относительной частотой случайного события?
2. Как вычисляют вероятность случайного события при классическом подходе?
3. Приведите пример достоверного события и пример невозможного события. Чему равна вероятность достоверного события; невозможного события?

Для тех, кто хочет знать больше

36. Сложение и умножение вероятностей

Рассмотрим пример.

Пусть в коробке находится 19 шаров: 10 белых, 4 красных и 5 зеленых. Из коробки наугад вынимают один шар. Рассмотрим такие события:

событие A — шар оказался красным;
событие B — шар оказался зеленым.

События A и B не могут произойти вместе (одновременно). Говорят, что события A и B являются *несовместными*.

Два события называются несовместными, если в одном и том же испытании они не могут произойти одновременно, т. е. наступление одного из них исключает наступление другого.

Пусть событие C означает, что извлеченный из коробки шар оказался не белым (красным или зеленым).

Выясним, как вероятность события C связана с вероятностями каждого из событий A и B. Найдем вероятности событий A, B и C. Для каждого испытания (извлечение из коробки одного шара) равновозможными являются 19 исходов. Из них для события A благоприятными являются 4 исхода, для события B — 5 исходов, для события C — 9 исходов. Отсюда

$$P(A) = \frac{4}{19},\ P(B) = \frac{5}{19},\ P(C) = \frac{9}{19}.$$

Мы видим, что

$$P(C) = P(A) + P(B).$$

Вообще

если событие C означает, что наступает одно из двух несовместных событий A или B, то вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B.

Пример 1. На карточках написали натуральные числа от 1 до 10 включительно, после чего карточки перевернули и перемешали. Затем наугад открыли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней написано простое число или число, большее 7?

▶ Пусть событие A означает, что на карточке написано простое число, а событие B означает, что на карточке написано число, большее 7. Для события A благоприятными являются 4 исхода из 10 равновозможных (появление одного из чисел 2, 3, 5, 7), т. е. вероятность события A равна 0,4. Для события B благоприятными являются 3 исхода из 10 равновозможных (появление чисел 8, 9, 10), т. е. вероятность события B равна 0,3. Нас интересует событие C, когда на карточке написано простое число или число, большее 7. Событие C наступает тогда, когда наступает одно из событий A или B. Очевидно, что эти события являются несовместными. Значит, вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B, т. е.

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7. \ \triangleleft$$

При решении некоторых задач бывает удобно воспользоваться свойством вероятностей *противоположных событий*.

Разъясним смысл понятия «противоположные события» на примере бросания игрального кубика. Пусть событие A означает, что выпало 6 очков, B — что выпало менее 6 очков. Всякое наступление события A означает ненаступление события B, а ненаступление события A — наступление события B. В таких случаях говорят, что A и B — противоположные события.

Найдем вероятности событий A и B.

Для события A благоприятным является один исход из шести равновозможных исходов, а для события B — пять исходов из шести. Значит,

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{5}{6}.$$

Нетрудно заметить, что $P(A) + P(B) = 1$.

Вообще

сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Действительно, пусть проводится некоторое испытание и рассматриваются два события: событие A и противоположное ему событие, которое принято обозначать $\bar{A}$.

События A и $\overline{A}$ — несовместные события. Событие, означающее наступление хотя бы одного из них, т. е. A или $\overline{A}$, является достоверным событием. Отсюда следует, что сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример 2. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 11?

▶ Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36. Пусть событие A означает, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 11. Так как благоприятным для события A является большое число исходов, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\overline{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 11. Благоприятными для события $\overline{A}$ являются три исхода:

$$(5;\ 6),\ (6;\ 5),\ (6;\ 6).$$

Поэтому

$$P(\overline{A}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Так как события A и $\overline{A}$ являются противоположными, то

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Отсюда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.\ \triangleleft$$

Рассмотрим теперь, как можно вычислить вероятность события, состоящего в совместном появлении двух *независимых событий.*

Два события называются независимыми, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого события.

Приведем пример.

Пусть в одном из двух ящиков находится 15 деталей, из которых 2 нестандартные, а в другом — 20 деталей, из которых 3 нестандартные. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся нестандартными?

Рассмотрим такие события:

A — из первого ящика вынимают нестандартную деталь;

B — из второго ящика вынимают нестандартную деталь.

Для события A благоприятными являются 2 исхода из 15, а для события B благоприятными являются 3 исхода из 20. Значит,

$$P(A) = \frac{2}{15},\quad P(B) = \frac{3}{20}.$$

Очевидно, что события A и B являются независимыми. Рассмотрим событие, состоящее в совместном появлении событий A и B. Обозначим его буквой C.

Общее число равновозможных исходов испытания, в которых событие C наступает или не наступает, равно $15 \cdot 20$.

Действительно, каждому из 15 извлечений детали из первого ящика соответствует 20 возможностей извлечения детали из второго ящика.

Благоприятными для события C являются те исходы, при которых обе вынутые детали являются нестандартными. Каждому из двух возможных извлечений нестандартной детали из первого ящика соответствует три возможности извлечения нестандартной детали из второго ящика, т. е. число исходов, благоприятных для события C, равно $2 \cdot 3$. Следовательно,

$$P(C) = \frac{2 \cdot 3}{15 \cdot 20} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{20}, \text{ т. е.}$$

$$P(C) = P(A) \cdot P(B).$$

Вообще

если событие C означает совместное наступление двух независимых событий A и B, то вероятность события C равна произведению вероятностей событий A и B.

Пример 3. В непрозрачном пакете лежат 9 жетонов с номерами 1, 2, ..., 9. Из пакета наугад вынимают один жетон, записывают его номер и жетон возвращают в пакет. Затем опять вынимают жетон и записывают его номер. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты жетоны, номера которых являются простыми числами?

▶ Пусть событие A состоит в том, что в первый раз вынут жетон, номер которого является простым числом, а событие B — в том, что во второй раз вынут жетон, номер которого является простым числом. Тогда $P(A) = \frac{4}{9}$ и $P(B) = \frac{4}{9}$, так как из чисел 1, 2, ..., 9 четыре числа являются простыми. Рассмотрим событие C, которое состоит в том, что оба раза вынуты жетоны, номера которых являются простыми числами.
Событие B не зависит от события A, так как на повторное извлечение жетона не влияет то, какой жетон был вынут в первый раз (извлеченный в первый раз жетон был возвращен в пакет). Значит,

$$P(C) = P(A) \cdot P(B), \text{ т. е. } P(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81} \approx 0{,}2. \ \triangleleft$$

Заметим, что если бы после первого извлечения жетон не возвращался обратно, то события A и B были бы зависимыми.

Действительно, после первого извлечения жетона в пакете осталось бы 8 жетонов. Если в первый раз извлекли жетон, номер которого простое число, то $P(B) = \frac{3}{8}$. Если же в первый раз извлекли жетон, номер которого не простое число, то $P(B) = \frac{4}{8}$.

Пример 4. В результате многократных наблюдений установили, что вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,9, а другого — 0,8. Каждый из стрелков сделал по одному выстрелу по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

▶ Рассмотрим такие события:
A — первый стрелок попал в мишень;
B — второй стрелок попал в мишень;
C — мишень поражена.
События A и B независимые. Однако воспользоваться в этом случае умножением вероятностей нельзя, так как событие C наступает не только тогда, когда оба стрелка попали в мишень, но и тогда, когда в мишень попал хотя бы один из них. Поступим иначе. Рассмотрим события $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$, противоположные соответственно событиям A, B и C. События $\overline{A}$ и $\overline{B}$ являются независимыми, так как промах при выстреле по мишени первого стрелка (событие $\overline{A}$) не зависит от непоражения мишени вторым стрелком (событие $\overline{B}$). Событие $\overline{C}$ означает совместное появление событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Поэтому

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}).$$

Из свойства вероятностей противоположных событий вытекает, что

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1, \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Отсюда получаем, что

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Так как события C и $\overline{C}$ противоположные, то теперь несложно найти вероятность события C:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

Значит, вероятность того, что мишень будет поражена, равна 0,98. ◁

Упражнения

820. Для украшения елки принесли коробку, в которой находится 10 красных, 7 зеленых, 5 синих и 8 золотых шаров. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется:

а) красным; б) золотым; в) красным или золотым?

821. В денежно-вещевой лотерее на 100 000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность (для обладателя одного билета):

а) вещевого выигрыша;

б) денежного выигрыша;

в) какого-либо выигрыша?

822. Взяли четыре карточки. На первой написали букву «о», на второй — «т», на третьей — «с», на четвертой — «р». Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад одну карточку за другой и положили их в ряд. Какова вероятность того, что в результате получилось слово «трос» или слово «сорт»?

823. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на одном кубике выпадет одно очко, а на другом — более трех очков?

824. В одной партии электролампочек 3% бракованных, а в другой — 4% бракованных. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Какова вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными?

825. На одной полке стоит 12 книг, 2 из которых — сборники стихов, а на другой — 15 книг, 3 из которых — сборники стихов. Наугад берут с каждой полки по одной книге. Какова вероятность того, что обе книги окажутся сборниками стихов?

826. В мешке находится 5 белых шаров и 3 черных. Из мешка наугад вынимают один шар. Его цвет записывают, шар возвращают в мешок и шары перемешивают. Затем снова из мешка вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты:

а) белые шары; б) черные шары?

827. Монету бросают 3 раза. Какова вероятность того, что каждый раз выпадет орел?

828. При стрельбе по мишени на полигоне вероятность попадания одного из двух орудий равна 0,8, а другого — 0,75. Оба орудия выстрелили по мишени по одному разу. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

829. В некоторой настольной игре игрок бросает сразу два кубика и делает столько ходов, какова сумма выпавших очков. Какова вероятность того, что игрок сделает менее 10 ходов?

830. В вазе 11 гвоздик, из которых 4 красные. В темноте наугад вынимают 3 гвоздики. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них будет красной?

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 11

831. Сколько существует четырехзначных чисел, кратных 10, если цифры в числах могут повторяться?

832. Пешеход должен пройти один квартал на север и три квартала на запад. Выпишите все возможные маршруты пешехода.

833. Выпишите все пятизначные числа, записанные тремя четверками и двумя единицами.

834. Из цифр 1, 2, 3, 5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?

835. Сколько четных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно записать с помощью цифр:

а) 1, 2, 3, 7; б) 1, 2, 3, 4?

836. Делится ли число $50!$ на:

а) 100; б) 305; в) 1550?

837. Найдите наименьшее значение n, при котором число $n!$ оканчивается:

а) одним нулем; б) двумя нулями; в) тремя нулями.

838. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких, которые:

а) кратны 2; б) кратны 3?

839. Сократите дробь:

а) $\frac{(n+1)!}{n!}$; б) $\frac{n!}{(n+2)!}$; в) $\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+4)!}$.

840. Решите уравнение:

а) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42$; б) $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} = \frac{5}{6}$.

841. Сколькими способами из класса, где учатся 24 учащихся, можно выбрать:

а) двух дежурных; б) старосту и помощника старосты?

842. У Антона шесть друзей. Он может пригласить в гости одного или нескольких из них. Определите общее число возможных вариантов.

843. Сколько команд участвовало в финале первенства, если известно, что каждая команда сыграла с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника, причем всего было сыграно 30 игр?

844. Сколькими способами четыре пассажира: Алексеев, Смирнов, Федоров и Харитонов — могут разместиться в девяти вагонах поезда, если:

а) все они хотят ехать в разных вагонах;

б) Алексеев и Смирнов хотят ехать в одном вагоне, а Федоров и Харитонов — в других вагонах, причем различных?

845. На плоскости отметили несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки провели прямую. Сколько точек было отмечено, если всего было проведено 28 прямых?

846. В 9 «А» классе учатся 25 учащихся, в 9 «Б» — 20 учащихся, а в 9 «В» — 18 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трех учащихся из 9 «А», двух — из 9 «Б» и одного — из 9 «В». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

847. Из группы туристов требуется выбрать дежурного и его помощника. Если бы туристов было на одного больше, то возможностей выбора было бы в 1,25 раза больше. Сколько туристов в группе?

848. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две группы:

а) по 4 и 8 человек; б) по 5 и 7 человек?

849. В отделе работают 5 ведущих и 8 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?

850. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (допускается повторение цифр). Сколько среди них таких, сумма цифр которых равна:

а) 3; б) 4; в) 6?

851. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких, сумма цифр которых равна:

а) 6; б) 9?

852. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{P_6 - P_4}{P_5}$; б) $\dfrac{A_8^4 - A_8^3}{A_7^3 - A_7^2}$; в) $\dfrac{C_6^3 - C_6^2}{A_6^2}$.

853. Сколько надо взять элементов, чтобы число размещений из них по четыре было в 12 раз больше, чем число размещений из них по два?

854. Число размещений из n элементов по четыре в 14 раз больше числа размещений из $n-2$ элементов по три. Найдите n.

855. Решите уравнение:

а) $14C_n^{n-2} = 15A_{n-3}^2$; в) $13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}$;

б) $6C_n^{n-3} = 11A_{n-1}^2$; г) $21C_{2n}^{n+1} = 11C_{2n+1}^{n-1}$.

К параграфу 12

856. Для натуральных чисел от 1 до 99 включительно найдите частоту появления простых чисел в первом, втором, третьем десятках и т. д. Сравните относительные частоты для:

а) первого и третьего десятков;
б) второго и десятого десятков.

857. На столе лежат 28 костей домино. Наугад берут одну кость.

а) Найдите вероятность того, что взятая кость в сумме содержит 6 очков.
б) Докажите, что вероятность взять кость, у которой сумма очков равна 5, равна вероятности взять кость, у которой сумма очков равна 4.

858. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно одну за другой три карточки, расположив их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что в результате получилось:

а) число 123;
б) число 312 или 321;
в) число, первая цифра которого 2?

859. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый наугад учеником билет имеет:

а) однозначный номер; б) двузначный номер?

860. Из ящика, в котором находятся шары с номерами от 1 до 100, наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не имеет цифры 6?

861. В мешке находятся жетоны с номерами от 1 до 15. Из мешка наугад вынимают один жетон. Какова вероятность того, что номер вынутого жетона не делится ни на 2, ни на 3?

862. В ящике лежит 6 красных шаров и 4 зеленых. Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 2 шара из них окажутся красными, а один — зеленым?

863. Из 28 костей домино извлекают наугад 2 кости. Какова вероятность того, что обе кости окажутся дуплями?

864. Из 40 деталей, лежащих в ящике, 3 бракованные. Из ящика наугад вынимают одну деталь. Какова вероятность того, что эта деталь окажется без брака?

865. На каждой карточке написана одна из букв «о», «п», «р», «с», «т». Несколько карточек наугад выкладывают одну за другой в ряд. Какова вероятность, что при выкладывании:

а) 3 карточек получится слово «рот»;
б) 4 карточек получится слово «сорт»;
в) 5 карточек получится слово «спорт»?

866. В коробке находятся шары с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что сумма номеров на них равна:

а) 3; б) 5?

867. В коробке находится 12 шаров, среди которых n белых, а остальные цветные. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, равна $\frac{1}{6}$. Сколько белых шаров в коробке?

868. В мешке содержится 24 шара. Среди них красных шаров в 2 раза больше, чем белых, а остальные шары синие. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, равна $\frac{1}{8}$. Найдите вероятность того, что вынутый наугад шар окажется синим.

869. В мешке содержатся жетоны с номерами от 1 до 50 включительно. Какова вероятность того, что в номере извлеченного наугад из мешка жетона цифра 3 содержится только один раз?

870. Одновременно подбрасывают три монеты. Какова вероятность того, что на всех трех монетах выпадет решка?

871. Чемодан можно открыть, если правильно набрать шифр 22 075 (при наборе шифра цифра каждого разряда может быть любой от 0 до 9). Какова вероятность того, что человек, набрав произвольно номер из 5 цифр, сможет открыть чемодан?

872. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков будет равна:

а) 3; б) 4; в) 5; г) 7?

873. Миша и Костя по очереди бросают три игральных кубика. Они договорились, что если при очередном броске выпадет 5 очков, то выигрывает Миша, а если выпадет 16 очков, то выигрывает Костя. У кого больше шансов выиграть?

874. Игральный кубик бросают 3 раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз на нем выпадет число очков:

а) кратное 2; б) кратное 3?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА 7–9 КЛАССОВ

Вычисления

875. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2-3x^2}{x^3}$ при $x=-\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{10x^2-5y^2}{x+y}$ при $x=1{,}4$, $y=-1{,}6$;

б) $\dfrac{1-m^2}{3m^2-m}$ при $m=\dfrac{2}{3}$; г) $\dfrac{abc}{a(b-c)}$ при $a=1{,}5$, $b=10$, $c=-2$.

876. Отмечая время (в минутах), которое учащиеся затратили на выполнение теста по математике, получили следующие данные: 18, 18, 19, 20, 23, 24, 24, 25, 25, 25. Для этого ряда данных найдите среднее арифметическое; моду; медиану; размах.

877. а) Телевизор стоил 10 000 р. В апреле он подорожал на 30%, а в декабре подешевел на 40%. Сколько стал стоить телевизор в декабре?

б) Цену товара повысили на 30%, а через некоторое время снизили на 40%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?

878. К 200 г 40%-ного раствора соли долили 300 г воды. Какой стала концентрация раствора соли?

879. а) Некоторое количество 15%-ного раствора соли смешали с таким же количеством 45%-ного раствора этой же соли. Какова концентрация получившегося раствора?

б) Некоторое количество 30%-ного раствора соли смешали с вдвое большим количеством 15%-ного раствора этой же соли. Какова концентрация получившегося раствора?

880. Имеется два сорта сливок — жирностью 10% и 20%. Их смешали в отношении 3 : 1. Какова жирность получившихся сливок?

8 - Ю. Н. Макарычев, 9 кл.

881. а) Клиент банка внес 8000 р. на вклад с годовым доходом 5%. Какая сумма окажется у него на счету через 2 года, если он никаких сумм со счета не снимал и дополнительных вложений не делал?

б) Клиент банка внес 8000 р. на вклад с годовым доходом 5%. Через год он положил на этот же вклад еще 2000 р. Какая сумма будет у него на счету через 2 года после открытия счета в банке?

882. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{15} + \sqrt{10}) \cdot 2\sqrt{5} - 5\sqrt{12}$; в) $(2\sqrt{12} - 3\sqrt{3})^2$;

б) $\dfrac{2\sqrt{70} - 2\sqrt{28}}{3\sqrt{35} - 3\sqrt{14}}$; г) $\dfrac{10 - 5\sqrt{3}}{10 + 5\sqrt{3}} + \dfrac{10 + 5\sqrt{3}}{10 - 5\sqrt{3}}$.

883. Упростите выражение

$$(5 - 2\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(4\sqrt{2} + 8\sqrt{3}).$$

884. Докажите, что:

а) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{18} - 3} \cdot \sqrt{\sqrt{18} + 3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{1{,}5}$; б) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{7 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{24}}} = \sqrt{0{,}4}$.

885. Докажите равенство:

а) $\sqrt{19 - 6\sqrt{10}} = \sqrt{10} - 3$; б) $\sqrt{23 - 8\sqrt{7}} = 4 - \sqrt{7}$.

886. Найдите значение:

а) многочлена $3x^2 - 6x - 5$ при $x = 1 + \sqrt{2}$;

б) дроби $\dfrac{x^2 - x - 5}{x - 1}$ при $x = \sqrt{5} + 1$.

887. Найдите значение выражения:

а) $0{,}3^{-3} + \left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1} + (-0{,}5)^{-2} \cdot \dfrac{3}{4} + (-1)^{-8} \cdot 6$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1} + \left(\dfrac{6}{17}\right)^{0} \cdot \dfrac{1}{8} - 0{,}25^{-2} \cdot 16$.

888. Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_2 = -6$, $a_3 = -2$.

889. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_2 = -2{,}4$ и $d = 1{,}2$.

890. Найдите двенадцатый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -\dfrac{1}{32}$, $b_3 = \dfrac{1}{16}$.

891. Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (x_n), если $x_2 = -32$ и $q = -\dfrac{1}{2}$.

892. Найдите значение выражения:

а) $\frac{20!}{18!}$; б) $\frac{7!}{10!}$; в) $\frac{50!}{49!}$; г) $\frac{10!}{5! \cdot 5!}$; д) $\frac{12!}{9! \cdot 3!}$.

893. Сравните числа:

а) $\frac{3!}{6!}$ и 10^{-2}; б) $\frac{15!}{10!}$ и 10^5.

894. Сколько пятизначных чисел, в которых все цифры разные, можно составить из цифр:

а) 1, 3, 5, 7, 9; б) 0, 2, 4, 6, 8?

895. Сколькими способами Аня, Толя, Зоя, Света, Алла и Петя могут установить очередь по уборке класса в течение шестидневной учебной недели, если Свете удобно дежурить по четвергам, а Алла просит оставить ей субботу?

896. В секции по плаванию занимается 12 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них:

а) четырех человек для предстоящих городских соревнований;
б) команду для участия в эстафете 4×100 м, определив порядок выступления спортсменов на всех четырех этапах?

897. У Саши в домашней библиотеке есть 10 научно-фантастических книг и 8 исторических романов. Петя хочет взять у него на летние каникулы 3 какие-нибудь научно-фантастические книги и 2 любых исторических романа. Сколько у него есть способов выбора этих книг?

898. Для шуточной новогодней лотереи, в которой будет разыграно 30 призов, отпечатали 150 билетов. Иван за участие в конкурсе певцов получил один билет. Какова вероятность того, что он выиграет приз? Какова вероятность того, что он приз не выиграет?

899. На одинаковых листочках бумаги написали цифры от 1 до 9, затем листочки перемешали и сложили в непрозрачный пакет. Наугад вытаскивают один листочек. Какова вероятность того, что на нем будет:

а) цифра 1; в) четная цифра;
б) цифра 9; г) нечетная цифра?

900. У Маши на полке стоит 5 фотоальбомов. Когда у Маши были гости, они сняли все альбомы с полки, чтобы посмотреть фотографии. После ухода гостей Маша вернула альбомы на полку, поставив их в случайном порядке. Какова вероятность того, что альбомы на полке оказались в том же порядке, что и прежде?

901. В ящике находятся 4 красных и 4 желтых шарика. Из него, не глядя, вынимают 3 шарика. Какова вероятность того, что:

а) все 3 шарика красные;
б) 2 шарика красного цвета и 1 желтого;
в) все шарики одного цвета?

Тождественные преобразования

902. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x - 2y)(x + 2y) + 4y^2$;
б) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 3a^2$;
в) $(5x - 1)^2 + 10x$;
г) $(3y + 4z)^2 - 8z(3y - 2z)$;
д) $(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2) + 6n^3$;
е) $(c^2 + 4d)(c^4 - 4c^2d + 16d^2) - c^2(c^4 - 1)$;
ж) $(3x - 4y)^2 - (2x - 7y)(4x + 2y)$;
з) $2x(2x + 3)^2 - (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.

903. Найдите значение выражения:

а) $8x^2(x - 4) - (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - 17$ при $x = 0{,}5$;
б) $4a^2(3a - 2) - 3a(2a - 1)^2 - (2a - 5)(2a + 5)$ при $a = 3{,}3$;
в) $(9x^2 - 3xb + b^2)(3x + b) - 9x(3x^2 - b) - b^3$ при $x = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$;
г) $x(3x - 2y)(3x + 2y) - x(3x + 2y)^2 + 2xy(5x + 2y)$ при $x = 0{,}5$, $y = -1$.

904. Докажите тождество:

а) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2) = a^4 - 16b^4$;
б) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1$;
в) $(a - 2)(a + 2)(a^2 - 2a + 4)(a^2 + 2a + 4) = a^6 - 64$;
г) $(c^2 - c - 2)(c^2 + c - 2) = c^4 - 5c^2 + 4$.

905. Разложите на множители:

а) $12x^3 - 3x^2y - 18xy^2$;
б) $42a^5 - 6a^4 + 30a^3$;
в) $8ab - 14a - 12b + 21$;
г) $x^2 - 5x - 9xy + 45y$.

906. Разложите на множители:

а) $x^4 - 25y^2$;
б) $4b^2 - 0{,}01c^6$;
в) $8a^3 + c^3$;
г) $x^9 - 27$;
д) $9ab^2 - 16ac^2$;
е) $-20xy^3 + 45x^3y$.

907. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - x - 42$;
б) $y^2 + 9y + 18$;
в) $81x^2 + 18x + 1$;
г) $16b^2 - 24b + 9$;
д) $6x^2 - x - 1$;
е) $3a^2 - 13a - 10$.

908. Сократите дробь:

а) $\dfrac{21a^3 - 6a^2b}{12ab - 42a^2}$;
б) $\dfrac{6m^3 + 3mn^2}{2m^3n + mn^3}$;
в) $\dfrac{x^2 - 2mx + 3x - 6m}{x^2 + 2mx + 3x + 6m}$;
г) $\dfrac{8ab + 2a - 20b - 5}{4ab - 8b^2 + a - 2b}$;
д) $\dfrac{16a^2 - 8ab + b^2}{16a^2 - b^2}$;
е) $\dfrac{9x^2 - 25y^2}{9x^2 + 30xy + 25y^2}$;
ж) $\dfrac{a^2 - 3a}{a^2 + 3a - 18}$;
з) $\dfrac{4x^2 - 8x + 3}{4x^2 - 1}$;
и) $\dfrac{m^2 + 4m - 5}{m^2 + 7m + 10}$.

909. а) Найдите значение выражения $\frac{3x+2y}{x}$, если известно, что $\frac{2x+3y}{y}=7$.

б) Найдите значение выражения $\frac{b}{a+b}$, если известно, что $\frac{4a-5b}{b}=3$.

910. Упростите:

а) $\frac{2}{x^2-3x}-\frac{1}{x^2+3x}-\frac{x+1}{x^2-9}$;

б) $\frac{2y+1}{y^2+3y}+\frac{y+2}{3y-y^2}-\frac{1}{y}$;

в) $\frac{a^2+16a+12}{a^3-8}-\frac{2-3a}{a^2+2a+4}-\frac{3}{a-2}$;

г) $\frac{2}{4b^2-6b+9}+\frac{4b^2+18}{8b^3+27}-\frac{1}{2b+3}$.

911. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{ab^2-16a}{5b^3}\cdot\frac{20b^5}{a^2b+4a^2}$;

б) $\frac{7xy}{x^2-4xy+4y^2}\cdot\frac{3x-6y}{14y^2}$;

в) $\frac{p^3-125}{8p^2}\cdot\frac{4p}{p^2+5p+25}$;

г) $\frac{9m^2-12mn+4n^2}{3m^3+24n^3}\cdot\frac{3m+6n}{2n-3m}$.

912. Упростите:

а) $\frac{x^2-4x}{x^2+7x}:\frac{24-6x}{49-x^2}$;

б) $\frac{y^3-16y}{2y+18}:\frac{4-y}{y^2+9y}$;

в) $\frac{(a+b)^2-2ab}{4a^2}:\frac{a^2+b^2}{ab}$;

г) $\frac{5c^3-5}{c+2}:\frac{(c+1)^2-c}{13c+26}$.

913. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{7(m-2)}{m^3-8}-\frac{m+2}{m^2+2m+4}\right)\cdot\frac{2m^2+4m+8}{m-3}$;

б) $\frac{a+5}{a^2-9}:\left(\frac{a+2}{a^2-3a+9}-\frac{2(a+8)}{a^3+27}\right)$;

в) $\left(\frac{x+2}{3x}-\frac{2}{x-2}-\frac{x-14}{3x^2-6x}\right):\frac{x+2}{6x}\cdot\frac{1}{x-5}$;

г) $\left(\frac{4x}{9-x^2}-\frac{x-3}{9+3x}\right)\cdot\frac{18}{x+3}-\frac{2x}{3-x}$.

914. Преобразуйте выражение:

а) $\frac{1}{2}+\left(\frac{3m}{1-3m}+\frac{2m}{3m+1}\right)\cdot\frac{9m^2-6m+1}{6m^2+10m}$;

б) $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{y^2}{xy^2-x^3}\right):\left(\frac{x-y}{x^2+xy}-\frac{x}{y^2+xy}\right)-\frac{x}{x+y}$;

в) $\dfrac{2a+3}{2a-3}\cdot\left(\dfrac{2a^2+3a}{4a^2+12a+9}-\dfrac{3a+2}{2a+3}\right)+\dfrac{4a-1}{2a-3}-\dfrac{a-1}{a}$;

г) $\left(\dfrac{a+3}{a^2+2a+1}+\dfrac{a-1}{a^2-2a-3}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a-3}{a+2}-1$;

д) $\dfrac{3(m+3)}{m^2+3m+9}+\dfrac{m^3-3m^2}{(m+3)^2}\cdot\left(\dfrac{3m}{m^3-27}+\dfrac{1}{m-3}\right)$;

е) $\left(\dfrac{9x^2+8}{27x^3-1}-\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{4}{9x^2+3x+1}\right)\cdot\dfrac{3x-1}{3x+1}$.

915. а) Найдите значение выражения a^2+b^2, если $a+b=6$, $ab=3$.

б) Найдите значение выражения $c^2+\dfrac{1}{c^2}$, если $c+\dfrac{1}{c}=2{,}5$.

916. Докажите, что:

а) значение выражения a^2+2a+2 ни при каком значении переменной a не может быть отрицательным;

б) выражение $2x^2-2xy+y^2$ при любых значениях x и y принимает неотрицательные значения.

917. Упростите выражение:

а) $(4x^{-2}y^3)^2\cdot(0{,}5x^2y^{-1})^3$;

б) $(0{,}25a^{-3}b^4)^{-2}\cdot(2a^5b^{-6})^{-1}$;

в) $\left(\dfrac{c^4}{6x^2y^{-5}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}c^2x^3y^{-2}\right)^4$;

г) $\left(\dfrac{0{,}1a^{-2}}{b^{-1}c^3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{b^5}{10a^4c^6}\right)^{-3}$.

918. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2\cdot3^{n+2}-5\cdot3^{n+1}}{3^{n-1}}$;

б) $\dfrac{25\cdot4^n}{4^n-4^{n-1}}$;

в) $\dfrac{10\cdot6^n}{2^{n+1}\cdot3^{n-1}}$;

г) $\dfrac{2^{2n-1}\cdot5^{2n+1}}{100^n}$.

919. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{98}$;

б) $\sqrt{24}$;

в) $-\sqrt{242}$;

г) $-\sqrt{75}$;

д) $0{,}1\sqrt{128}$;

е) $0{,}4\sqrt{40}$;

ж) $\sqrt{12x^2}$, где $x\geqslant0$;

з) $\sqrt{18y^2}$, где $y<0$;

и) $\sqrt{5a^4}$.

920. Внесите множитель под знак корня:

а) $10\sqrt{3}$;

б) $0{,}1\sqrt{2}$;

в) $-3\sqrt{5}$;

г) $-0{,}2\sqrt{40}$;

д) $x\sqrt{3}$, где $x\geqslant0$;

е) $y\sqrt{5}$, где $y<0$.

921. Упростите выражение:

а) $\sqrt{50x} + \sqrt{32x} - \sqrt{98x}$;

б) $(\sqrt{a} + \sqrt{2})(\sqrt{a} - \sqrt{2}) - (\sqrt{a} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{a}$;

в) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

г) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)$.

922. Сократите дробь:

а) $\dfrac{5+\sqrt{y}}{5\sqrt{y}+y}$; в) $\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+1}$; д) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{xy}+y}$;

б) $\dfrac{3x-6}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{b-\sqrt{b}+1}{b\sqrt{b}+1}$; е) $\dfrac{c-\sqrt{cd}}{c\sqrt{c}-d\sqrt{d}}$.

923. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{3x}{7\sqrt{x}}$; б) $\dfrac{5}{\sqrt{ab}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt{c}-1}$; г) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$.

924. Докажите, что:

а) $\dfrac{x-y}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{y}}{y} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$; б) $\dfrac{a-b}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{b}}{b} - \dfrac{\sqrt{a}}{a}$.

Уравнения и системы уравнений

925. Решите уравнение:

а) $3x(x-1) - 17 = x(1+3x) + 1$;

б) $2x - (x+2)(x-2) = 5 - (x-1)^2$;

в) $\dfrac{3x+1}{2} = \dfrac{2x-3}{5}$;

г) $\dfrac{x-3}{6} + x = \dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{4-x}{2}$.

926. От фермы до станции Петр может доехать на велосипеде или дойти пешком. Идет он со скоростью 6 км/ч, а на велосипеде едет со скоростью 16 км/ч. Каково расстояние от фермы до станции, если на велосипеде Петр тратит на этот путь на 40 мин меньше?

927. Расстояние от города A до города B поезд должен проходить по расписанию за 4 ч 30 мин. По техническим причинам он был задержан с отправлением из города A на 30 мин. Увеличив скорость на 10 км/ч, поезд прибыл в город B вовремя. Найдите расстояние между городами A и B.

928. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, а через 30 мин из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Скорость велосипедиста на 8 км/ч больше скорости пешехода. Велосипедист через 1,5 ч после выезда встретил пешехода. С какой скоростью шел пешеход и ехал велосипедист, если известно, что расстояние между пунктами A и B равно 26 км?

929. Среднее арифметическое четырех чисел равно 11,5. Второе число в 1,5 раза меньше первого и на 10 меньше третьего, а четвертое равно сумме первого и второго. Найдите эти числа.

930. Сколько нужно добавить воды к 300 г 20%-ного раствора соли, чтобы получить 8%-ный раствор этой соли?

931. Решите квадратное уравнение:

а) $2{,}5x^2 + 4x = 0$; в) $0{,}2t^2 - t - 4{,}8 = 0$;

б) $6y^2 - 0{,}24 = 0$; г) $3\frac{1}{3}u^2 + 3u - 3 = 0$.

932. Существует ли значение переменной x, при котором значение квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 31$ равно: а) -5; б) 6; в) 55?

933. При каких значениях m уравнение имеет хотя бы один корень:

а) $10x^2 - 10x + m = 0$; в) $3x^2 + mx - 5 = 0$;

б) $mx^2 + 4x - 2 = 0$; г) $2x^2 - mx + 2 = 0$?

934. При каких значениях k уравнение не имеет корней:

а) $kx^2 + 8x - 15 = 0$; в) $5x^2 + kx + 1 = 0$;

б) $6x^2 - 3x + k = 0$; г) $7x^2 - kx - 1 = 0$?

935. Решите уравнение:

а) $0{,}3x(x + 13) - 2x(0{,}9 - 0{,}2x) = 0$;

б) $1{,}5x(x + 4) - x(7 - 0{,}5x) = 0{,}5(10 - 2x)$;

в) $\frac{(2x+1)^2}{25} - \frac{x-1}{3} = x$; д) $\frac{(2-x)^2}{3} - 2x = \frac{(7+2x)^2}{5}$;

г) $\frac{(3x+2)^2}{11} - \frac{x+5}{4} = x^2$; е) $\frac{(6-x)^2}{8} + x = 7 - \frac{(2x-1)^2}{3}$.

936. Садовый участок, имеющий форму прямоугольника, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что длина участка на 15 м больше его ширины, а площадь его равна 700 м^2.

937. Все ученики одного класса обменялись фотографиями. Сколько учеников было в этом классе, если всего было передано 600 фотокарточек?

938. Цифра десятков двузначного числа на 3 меньше цифры единиц, а произведение этого двузначного числа на сумму его цифр равно 70. Найдите это число.

939. Участок земли имеет форму прямоугольного треугольника, один из катетов которого на 20 м больше другого катета. Найдите длину границы данного участка, если известно, что его площадь равна 0,24 га.

940. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$;

б) $\frac{70}{x^2-16} - \frac{17}{x-4} = \frac{3x}{x+4}$;

в) $\frac{3}{(2-x)^2} - \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{14}{x^2-4}$;

г) $\frac{2}{4-x^2} - \frac{1}{2x-4} - \frac{7}{2x^2+4x} = 0$;

д) $\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{3x-x^2} = \frac{3}{2x+6}$;

е) $\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} + \frac{4}{(x+1)^2} = 0$;

ж) $\frac{2}{x^2+5x} + \frac{3}{2x-10} = \frac{15}{x^2-25}$;

з) $\frac{5}{2x+6} - \frac{1}{6x^2-18x} = \frac{29}{27-3x^2}$.

941. Две бригады, работая вместе, выполняют работу за 6 ч. Одной первой бригаде на ту же работу требуется на 5 ч больше, чем второй. За какое время может выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно?

942. Две автомашины отправились одновременно из села в город, который удален на 180 км. Одна автомашина пришла в город на 45 мин позже другой, так как ее скорость была на 20 км/ч меньше. С какой скоростью шла каждая автомашина?

943. Моторная лодка прошла по течению реки 36 км и возвратилась обратно, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения равна 3 км/ч.

944. Моторная лодка прошла 18 км по течению и 14 км против течения, затратив на весь путь 3 ч 15 мин. Найдите скорость течения, если собственная скорость лодки 10 км/ч.

945. Катер прошел 75 км по течению реки и столько же против течения. На весь путь он затратил в 2 раза больше времени, чем ему понадобилось бы, чтобы пройти 80 км в стоячей воде. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения равна 5 км/ч?

946. Токарь должен был обработать 240 деталей к определенному сроку. Усовершенствовав резец, он стал обрабатывать в час на 2 детали больше, чем предполагалось по плану, и потому выполнил задание на 4 ч раньше срока. Сколько деталей в час должен был обрабатывать токарь?

947. Сотрудник типографии должен набрать к определенному сроку рукопись объемом 150 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем обычно, то закончит работу на 1 день раньше намеченного срока. Сколько страниц в день обычно набирает сотрудник?

948. Турист отправился на автомашине из города A в город B. Первые 75 км он ехал со скоростью, на 10 км/ч меньшей, чем рассчитывал, а остальной путь со скоростью, на 10 км/ч большей, чем рассчитывал. В город B, который удален от города A на 180 км, турист прибыл вовремя. С какой скоростью он ехал в конце пути?

949. Расстояние от станицы до железнодорожной станции равно 60 км. Мотоциклист выехал из станицы на $1\frac{1}{4}$ ч позже велосипедиста и прибыл на станцию, когда велосипедист был от нее в 21 км. Найдите скорость велосипедиста, если она была на 18 км/ч меньше скорости мотоциклиста.

950. Из села в город, к которому ведет дорога длиной 120 км, выехала легковая автомашина. Через 30 мин из города в село выехал грузовик и встретился с легковой автомашиной в 45 км от города. Найдите скорость грузовика, если она меньше скорости легковой автомашины на 5 км/ч.

951. Решите уравнение:

а) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$; в) $2x^4 - 9x^2 - 5 = 0$;
б) $9x^4 + 77x^2 - 36 = 0$; г) $6x^4 - 5x^2 - 1 = 0$.

952. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2(5x - 1)^2 + 35x - 11 = 0$;
б) $(x^2 + x - 3)^2 + 12x^2 + 12x - 9 = 0$.

953. Решите уравнение:

а) $x^4 - 16x^2 = 0$; г) $0,4x^4 = x^3$; ж) $x^3 + x^2 = 9x + 9$;
б) $x = x^3$; д) $x^3 + 6x^2 - 16x = 0$; з) $2x^3 + 8x = x^2 + 4$.
в) $1,2x^3 + x = 0$; е) $x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$;

954. Приведите уравнение к виду $x^n = a$ и решите его:

а) $\frac{1}{8}x^3 = 1$; в) $\frac{1}{27}x^3 = 0,001$; д) $1 + x^5 = 0$;
б) $1000x^3 + 1 = 0$; г) $\frac{1}{9}x^4 - 16 = 0$; е) $x^6 - 16 = 0$.

955. Изобразив схематически графики, выясните, имеет ли уравнение корни:

а) $\frac{1}{2}x - 2 = x^3$; в) $\frac{1}{x} = -x^2 + 1$;
б) $-3x - 1 = \sqrt{x}$; г) $3 + x^2 = \frac{12}{x}$.

956. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 7x - 6$; в) $\frac{4}{x} = x^2 - 2x$;
б) $\frac{6}{x} = 0,5x - 2$; г) $\sqrt{x} = x^3$.

957. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - y = 17, \\ y + 6x = 23; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x = y + 50, \\ -3{,}4x + 2{,}6y = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x - 10y = 11, \\ 5y + 7x = 19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 2y = 3, \\ 13x + 6y = -1. \end{cases}$

958. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} - \frac{x - 2y}{2} = \frac{3}{2}, \\ \frac{2x + y}{2} - \frac{x + 2y}{3} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x - y + 1}{2} + \frac{x + y - 1}{5} = 7, \\ \frac{x - y + 1}{3} - \frac{x + y - 1}{4} = -3. \end{cases}$

959. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y = 13, \\ 2x + by = 5 \end{cases}$$

с переменными x и y, если одним из решений первого уравнения является пара чисел (8; 1), а второго — пара чисел (5; −1).

960. Каково расстояние от точки пересечения прямых $5x - 2y = -25$ и $-4x + 3y = 27$: а) до оси абсцисс; б) до оси ординат; в) до начала координат?

961. Подберите значения k и b так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = 2{,}5x - 3: \end{cases}$$

а) не имела решений;
б) имела бесконечно много решений;
в) имела единственным решением пару чисел, в которой $x = 4$.

962. Принадлежит ли точка пересечения прямых $-2x + y = 11$ и $3x + 2y = 1$ прямой:

а) $10x - 3y = -45$; б) $-7x + 9y = 65$?

963. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точки:

а) (0; 30) и (6; 0); б) (2; 3) и (−2; 10).

964. Найдите те значения a и b, при которых точки $A(2; -3)$ и $B(1; 4)$ принадлежат параболе $y = ax^2 + bx$.

965. При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ пересекает оси координат в точках (0; −3) и $(\frac{1}{2}; 0)$? В какой еще точке эта парабола пересекает ось x?

966. Мастер и ученик изготовили в первый день 100 деталей. Во второй день мастер изготовил деталей на 20% больше, а ученик — на 10% больше, чем в первый день. Всего во второй день мастер и ученик изготовили 116 деталей. Сколько деталей изготовил мастер и сколько изготовил ученик в первый день?

967. Легковой автомобиль проехал за 2 ч на 10 км больше, чем грузовой за 3 ч. Если уменьшить скорость легкового автомобиля на 25%, а грузового на 20%, то грузовой автомобиль проедет за 5 ч на 20 км больше, чем легковой за 3 ч. Найдите скорость каждого автомобиля.

968. На опытном поле под рожь отвели участок 20 га, а под пшеницу — 30 га. В прошлом году с обоих участков собрали 2300 ц зерна. В этом году урожайность ржи повысилась на 20%, а пшеницы — на 30% и поэтому собрали зерна на 610 ц больше, чем в прошлом году. Какой была урожайность каждой культуры в этом году?

969. Расстояние между пунктами A и B равно 160 км. Из A в B выехал велосипедист, и в то же время из B в A выехал мотоциклист. Их встреча произошла через 2 ч, а через 30 мин после встречи велосипедисту осталось проехать в 11 раз больше, чем мотоциклисту. Каковы скорости мотоциклиста и велосипедиста?

970. Имеются два сплава серебра с медью. Первый содержит 67% меди, а второй — 87% меди. В каком соотношении нужно взять эти два сплава, чтобы получить сплав, содержащий 79% меди?

971. Смешали два раствора соли. Концентрация первого составляла 40%, а концентрация второго — 48%. В результате получился раствор соли концентрацией 42%. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

972. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + x^2 = 5x, \\ 2y + 5 = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 2x^2 + y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = -2, \\ y + 8 = \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

973. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 + y + 8 = xy, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 1, \\ 3y + x = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x + y = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3y = -12, \\ 2y - 7x = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 13; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^2 - 6x + y = 0, \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1. \end{cases}$

974. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y - xy = 14, \\ x + 2y + xy = -7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ xy = 8. \end{cases}$

975. Не выполняя построения, выясните, пересекаются ли:

а) парабола $y = x^2 - 6x + 8$ и прямая $x + y = 4$;

б) прямая $x + y = 4$ и гипербола $y = \frac{3}{x}$;

в) окружности $x^2 + y^2 = 4$ и $(x - 3)^2 + y^2 = 1$.

Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте решение с помощью графиков.

976. При каком значении c имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x - 3y = 7, \\ 2x + 5y = c? \end{cases}$$

977. Не выполняя построения, выясните, пересекаются ли парабола $y = x^2 - x + 4$ и гипербола $y = \frac{4}{x}$. Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте решение с помощью графиков.

978. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} x + 3y = 2, \\ xy = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

979. Если от числителя и знаменателя обыкновенной дроби отнять по единице, то дробь увеличится на $\frac{1}{6}$. Если же к числителю и знаменателю прибавить по единице, то дробь уменьшится на $\frac{1}{10}$. Найдите эту дробь.

980. Если от числителя и знаменателя обыкновенной дроби отнять по единице, то дробь уменьшится на $\frac{1}{10}$. Если же к числителю и знаменателю прибавить по единице, то дробь увеличится на $\frac{1}{15}$. Найдите эту дробь.

981. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 см, а его площадь равна 180 см^2. Найдите катеты этого треугольника.

982. Площадь прямоугольного треугольника равна 44 см^2. Если один из его катетов уменьшить на 1 см, а другой увеличить на 2 см, то площадь будет равна 50 см^2. Найдите катеты данного треугольника.

983. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы один из них был переведен на другой участок, а второй закончил работу, проработав еще 9 дней. За сколько дней каждый рабочий мог выполнить всю работу?

984. Двое рабочих, работая вместе, выполнили работу за 2 дня. Сколько времени нужно каждому из них на выполнение всей работы, если известно, что если бы первый проработал 2 дня, а второй — один, то всего было бы сделано $\frac{5}{6}$ всей работы?

985. Найдите номер члена арифметической прогрессии (a_n), равного 3, если $a_1 = 48{,}5$ и $d = -1{,}3$. Является ли членом этой прогрессии число $-3{,}5$; 15?

986. В арифметической прогрессии четырнадцатый член равен 140, а сумма первых четырнадцати членов равна 1050. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

987. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Известно, что $a_6 = -6$ и $a_{16} = 17{,}5$. Найдите сумму первых шестнадцати членов этой прогрессии.

988. В арифметической прогрессии первый член равен 28, а сумма первых двадцати пяти членов равна 925. Найдите разность и тридцатый член этой прогрессии.

989. В арифметической прогрессии (a_n) сумма шестого и десятого членов равна 5,9, а разность двенадцатого и четвертого членов равна 2. Найдите двадцать пятый член этой прогрессии.

990. В арифметической прогрессии (a_n) сумма пятого и десятого членов равна -9, а сумма четвертого и шестого членов равна -4. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

991. В арифметической прогрессии третий член равен 150, а тринадцатый член равен 110. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, сложили, если их сумма оказалась равной нулю?

992. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:
а) x_1, если $x_8 = -128$ и $q = -4$; б) q, если $x_1 = 162$ и $x_9 = 2$.

993. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_1 = 6$ и $b_3 = \frac{2}{3}$.

994. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_6 = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$.

995. Пятый член геометрической прогрессии (b_n) равен $1\frac{1}{2}$, а знаменатель прогрессии равен $-\frac{1}{2}$. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

996. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что все члены последовательности положительны и $b_3 = 20$, $b_5 = 80$.

997. В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 + b_2 = 30$, а $b_2 + b_3 = 20$. Найдите первые три члена этой прогрессии.

998. В геометрической прогрессии (b_n), знаменатель которой положителен, $b_1 \cdot b_2 = \frac{1}{27}$, а $b_3 \cdot b_4 = 3$. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

Неравенства

999. Оцените периметр P и площадь S прямоугольника, длины сторон которого a см и b см, если $14{,}3 \leqslant a \leqslant 14{,}4$ и $25{,}1 \leqslant b \leqslant 25{,}2$.

1000. Пользуясь тем, что $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ и $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените значение выражения: а) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; в) $\sqrt{35}$.

1001. Решите неравенство:

а) $0{,}3(2m - 3) < 3(0{,}6m + 1{,}3)$;
б) $1{,}1(5x - 4) > 0{,}2(10x - 43)$;
в) $10 - 5(0{,}3a - 0{,}2) \geqslant 5 - 10(0{,}1a + 0{,}2)$;
г) $3{,}2(2b + 1) + 5{,}7 \leqslant 7{,}3 - 1{,}6(3 - 5b)$;
д) $4{,}3x - \frac{1}{2}(2{,}8x - 0{,}6) > \frac{1}{3}(3x + 0{,}6) + 2{,}9x$;
е) $\frac{2}{5}(5{,}5m - 2) - 0{,}8m < 4{,}6m - \frac{3}{4}(3{,}6m - 1{,}6)$;
ж) $(2{,}1y + 2)(0{,}2y - 3) - (0{,}7y - 1)(0{,}6y + 4) \geqslant -83$;
з) $(1 - 3{,}6a)(0{,}2a + 3) + (4 + 0{,}9a)(0{,}8a + 10) \leqslant 42{,}2$.

1002. Решите неравенство:

а) $\frac{4{,}2 + 2x}{3} > 1{,}5x - 1{,}1$;
б) $2{,}3a + 0{,}8 < \frac{5{,}8a + 3{,}4}{2}$;
в) $\frac{0{,}5 - 5y}{6} \geqslant \frac{0{,}6 - 5y}{4}$;
г) $\frac{0{,}6m + 1{,}2}{12} \leqslant \frac{1{,}5m - 2{,}5}{15}$;
д) $\frac{1{,}3a - 0{,}7}{4} - \frac{0{,}9a + 0{,}3}{3} > 0$;
е) $\frac{1{,}6 - 0{,}3y}{2} + \frac{4{,}4 + 1{,}5y}{5} < -4{,}05y$.

1003. При каких значениях b:

а) значения дроби $\frac{12 - 1{,}5b}{5}$ меньше соответствующих значений дроби $\frac{11 - 0{,}5b}{2}$;

б) значения дроби $\frac{1{,}4 + b}{4}$ больше соответствующих значений дроби $\frac{2{,}6 + 3b}{2}$?

1004. Решите неравенство:

а) $(5-2x)(\sqrt{6}-3)<0$;

б) $(4-\sqrt{10})(3x+1)>0$;

в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+7x}<0$;

г) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{8}}{4+5x}>0$.

1005. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}5x-2>2x+1,\\2x+3<18-3x;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4y+5>y+17,\\y-1>2y-3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}12y-1<3-2y,\\5y<2-11y;\end{cases}$

г) $\begin{cases}8x+1>5x-1,\\9x+9<8x+8.\end{cases}$

1006. Решите систему трех неравенств:

а) $\begin{cases}2x+5>3x-1,\\\frac{x}{3}>-1,\\10x<0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}6x>x-10,\\2x-4<0,\\2x+1>x+4.\end{cases}$

1007. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x-3(x+1)<x+8,\\6x(x-1)-(2x+2)(3x-3)>0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}10(x-1)-5(x+1)>4x-11,\\x^2-(x+2)(x-2)<3x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x-\frac{4x-1}{3}<10,\\4x-1-\frac{x}{3}<10;\end{cases}$

г) $\begin{cases}3y-\frac{2y+1}{2}>4-\frac{2-y}{3}-y,\\\frac{5y-1}{3}-(y-1)>3y.\end{cases}$

1008. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases}(3x+2)^2\geqslant(3x-1)(3x+1)-31,\\(2x-3)(8x+5)<(4x-3)^2-14;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(5x-2)^2+36>5x(5x-3),\\3x(4x+2)+40\leqslant 4x(3x+7)-4.\end{cases}$

1009. Решите двойное неравенство:

а) $-5<\frac{4m-3}{3}<7$;

б) $3\leqslant\frac{1-2x}{5}\leqslant 11$;

в) $-11<\frac{2-3p}{2}\leqslant -8$;

г) $-0{,}2\leqslant\frac{5x+2}{4}\leqslant 2$.

1010. При каких значениях переменной x:

а) значения двучлена $0{,}5-0{,}2x$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

б) значения дроби $\frac{20x+40}{3}$ принадлежат промежутку $[-100;\ 100]$?

1011. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 15 < 0$;
б) $5x^2 - 11x + 2 \geqslant 0$;
в) $10 - 3x^2 \leqslant 5x - 2$;
г) $(2x + 3)(2 - x) > 3$;
д) $2x^2 - 0{,}5 \leqslant 0$;
е) $3x^2 + 3{,}6x > 0$;
ж) $(0{,}2 - x)(0{,}2 + x) < 0$;
з) $x(3x - 2{,}4) > 0$.

1012. Решите неравенство:

а) $(2x + 1)(x + 4) - 3x(x + 2) < 0$;
б) $(3x - 2)^2 - 4x(2x - 3) > 0$;
в) $(1 - 6x)(1 + 6x) + 7x(5x - 2) > 14$;
г) $(5x + 2)(x - 1) - (2x + 1)(2x - 1) < 27$.

1013. Докажите, что при любых x:

а) трехчлен $x^2 - 3x + 200$ принимает положительные значения;
б) трехчлен $-x^2 + 22x - 125$ принимает отрицательные значения.

1014. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leqslant 0, \\ 2x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 2x - 9 \leqslant 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \\ 3 - x \leqslant 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x^2 + 2x \geqslant 0, \\ 5x \geqslant 0. \end{cases}$

1015. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 15 \geqslant 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 + 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 8 \leqslant 0. \end{cases}$

1016. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{12x - 4}$;
б) $\sqrt{3 - 0{,}6x}$;
в) $\sqrt{15 + 2x - x^2}$;
г) $\sqrt{2x^2 + x - 6}$;
д) $\sqrt{12 - 5x} + \sqrt{2x - 1}$;
е) $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{3x - 17}$?

1017. Найдите область определения каждого из выражений:

а) $2x - 5$, $\dfrac{1}{2x - 5}$ и $\sqrt{2x - 5}$;
б) $2x^2 + 7x - 4$, $\dfrac{1}{2x^2 + 7x - 4}$ и $\sqrt{\dfrac{1}{2x^2 + 7x - 4}}$;
в) $x^2 + 1$, $\sqrt{x^2 + 1}$ и $\dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Функции

1018. Функция $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-4; 5]$, задана графиком (рис. 85). Какова область значений функции? Найдите $f(-3)$, $f(-1{,}5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3{,}5)$. Найдите координаты точек, в которых график функции пересекает оси координат.

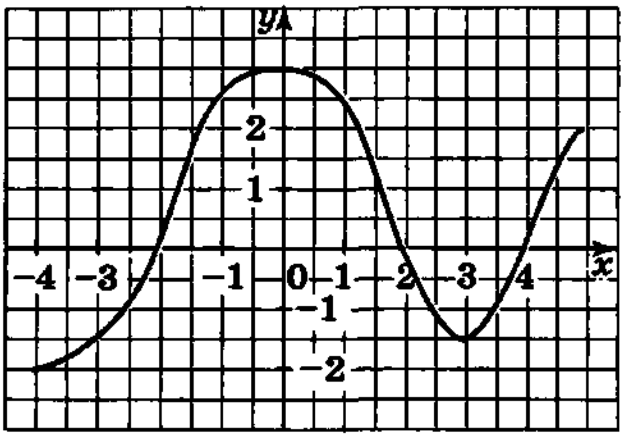


Рис. 85

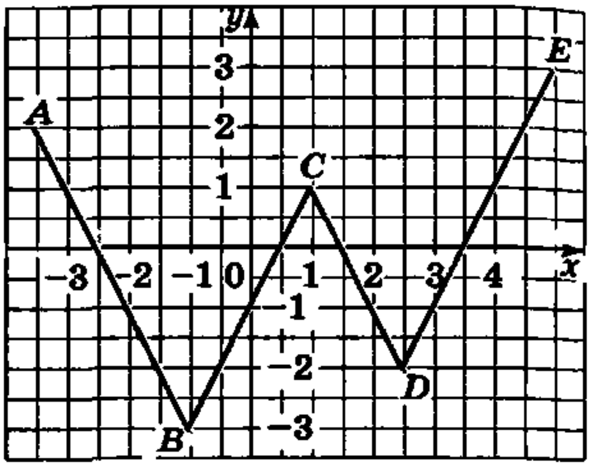


Рис. 86

1019. Найдите по графику функции $y = f(x)$ (см. рис. 85) значения аргумента, при которых: а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$.

1020. Ломаная $ABCDE$ является графиком функции $y = f(x)$ (рис. 86). В каких промежутках эта функция принимает положительные значения и в каких — отрицательные?

1021. Постройте график функции:

а) $y = -2{,}5x$; в) $y = -5$; д) $y = \frac{1}{2}x + 3$;

б) $y = 2x - 3$; г) $y = -x + 4$; е) $y = \frac{2 - x}{4}$.

1022. Функция $y = f(x)$ задана формулой $y = \frac{6 - 2x}{3}$. При каких значениях аргумента x: а) $f(x) = 0$; б) $f(x) < 0$; в) $f(x) \geqslant 0$? Постройте график этой функции.

1023. Какие из линейных функций $y = -3x + 9$, $y = 5x$, $y = -7$, $y = 9x - 1$, $y = -x - 100$, $y = 1 + 5x$ являются:

а) возрастающими; б) убывающими?

1024. Каково взаимное расположение графиков линейных функций:

а) $y = 7x + 16$ и $y = 7x - 25$; в) $y = -2{,}8x$ и $y = -2{,}8x + 11$;

б) $y = 3{,}5x - 4$ и $y = -5x - 4$; г) $y = 0{,}6x + 8$ и $y = -0{,}6x$?

В каждом случае изобразите графики схематически.

1025. Функция задана формулой $y = -x^2 + 3$. Какова область определения этой функции? Найдется ли такое значение аргумента, при котором значение этой функции равно -1; 1; 5? Постройте график этой функции и укажите ее область значений.

1026. Постройте график функции $y = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$. При каких значениях x значение y равно нулю; больше нуля; меньше нуля? В каком промежутке эта функция возрастает и в каком убывает? Каково наибольшее значение этой функции?

1027. Постройте график функции $y = x^2 - 4x - 5$. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения? Какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 4$?

1028. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 2$; в) $y = x^2 - 4x$; д) $y = x^2 + x - 6$;
б) $y = -x^2 + 1{,}5$; г) $y = 1{,}5x^2 + 6x$; е) $y = 3x^2 - 6x + 5$.

В каждом случае укажите наименьшее (или наибольшее) значение функции.

1029. В каком промежутке возрастает и в каком убывает квадратичная функция:

а) $y = 2x^2 + 10x - 7$; в) $y = 4x^2 + 2x$;
б) $y = -3x^2 + x + 5$; г) $y = 3x - 5x^2$?

1030. Постройте график функции: а) $y = \frac{8}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$. В каждом случае укажите значения x, при которых $y > 0$; $y < 0$.

1031. Изобразите схематически график функции:

а) $y = ax + 5$ при $a < 0$; д) $y = ax^2 - 3$ при $a > 0$;
б) $y = 10x + b$ при $b > 0$; е) $y = ax^2 + 2$ при $a < 0$;
в) $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$; ж) $y = ax^2 + bx$ при $a > 0$, $b > 0$;
г) $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$; з) $y = ax^2 + bx$ при $a < 0$, $b > 0$.

1032. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2x - 11$ и $y = -5x + 3$;
б) $y = -3x - 10$ и $y = x^2 - 13x + 6$;
в) $y = -3x^2 + x - 3$ и $y = -x^2 + x - 5$;
г) $y = 4x^2 + 3x + 6$ и $y = 3x^2 - 3x - 3$.

1033. Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = 2x - 4$: а) относительно оси y; б) относительно оси x; в) относительно начала координат.

1034. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; б) $y = \frac{x^2 - 2x}{x}$; в) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$.

1035. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x^2 + 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2 + x, \text{ если } x \leqslant -1, \\ 1, \text{ если } -1 < x \leqslant 1, \\ 2 - x, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 1, \\ -x^2 + 2x + 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1036. Найдите корни многочлена

$$2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4.$$

1037. Если в многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ вместо a, b, c и d подставлять числа -7, 4, -3 и 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной, например $-7x^3 + 4x^2 - 3x + 6$, $4x^3 - 7x^2 + 6x - 3$ и т. д. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень.

1038. Докажите, что многочлен $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9$ не имеет отрицательных корней.

1039. При каком значении a сумма квадратов корней квадратного трехчлена $x^2 - (a - 2)x - a - 1$ принимает наименьшее значение?

1040. Докажите, что при любых значениях a, b и c график функции $y = (x - a)(x - b) - c^2$ имеет хотя бы одну общую точку с осью x.

1041. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 3|x| - 2$; б) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - x\right| - 4$.

1042. Найдите координаты общих точек оси x и графика функции $y = x^2 - 4x + |2x - 8|$.

1043. При каком значении a графики функций $y = x^2 - 7x + a$ и $y = -3x^2 + 5x - 6$ имеют единственную общую точку? Найдите ее координаты.

1044. Докажите, что многочлен $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ не принимает отрицательных значений.

1045. При каких значениях m квадратный трехчлен

$$mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

принимает лишь отрицательные значения?

1046. Найдите область значений функции $y = \frac{x}{x^2+1}$.

1047. Сумма квадратов корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 1,75. Найдите x_1 и x_2.

1048. Найдите значения a, при которых один из корней уравнения $x^2 - 3{,}75x + a^3 = 0$ является квадратом другого.

1049. При каком значении m корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ принадлежат интервалу $(-2;\ 4)$?

1050. При каких значениях a биквадратное уравнение $x^4 + ax^2 + a - 1 = 0$ имеет лишь два различных корня?

1051. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)(8-x)=10,\\(x+y)(y+5)=20.\end{cases}$$

1052. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=447,\\xy(x-y)=210;\end{cases}$ б) $\begin{cases}xy(x+y)=30,\\x^3+y^3=35.\end{cases}$

1053. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^3-y^3=19(x-y),\\x^3+y^3=7(x+y).\end{cases}$$

1054. Найдите все решения системы

$$\begin{cases}x^3+x^3y^3+y^3=12,\\x+xy+y=0.\end{cases}$$

1055. Решите уравнение

$$(x+3)^4+(x+5)^4=4.$$

1056. Решите уравнение

$$(x^2+x)^4-1=0.$$

1057. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\xy=8.\end{cases}$$

1058. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=4{,}25,\\x+y=130.\end{cases}$$

1059. Знаменатель обыкновенной дроби меньше квадрата ее числителя на 1. Если числитель и знаменатель этой дроби увеличить на 2, то значение дроби станет больше $\frac{1}{4}$, а если числитель и знаменатель уменьшить на 3, то значение дроби станет меньше $\frac{1}{10}$. Найдите такие дроби.

1060. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ y + yz + z = 11, \\ z + zx + x = 7. \end{cases}$$

1061. Найдите значение m, при котором корни уравнения $x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ образуют арифметическую прогрессию.

1062. Докажите, что при любом a выполняется неравенство

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} \leqslant 3.$$

1063. За сколько часов может выполнить работу каждый из трех рабочих, если производительность труда третьего рабочего равна полусумме производительностей труда первого и второго? Известно, что если бы третий рабочий проработал один 48 ч, то для окончания работы первому потребовалось бы 10 ч, а второму — 15 ч.

1064. Существует ли такое двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр дает в частном 2 и в остатке 6, а при делении на произведение цифр дает в частном 4 и в остатке 6?

1065. Последовательности (y_n) и (x_n) заданы формулами $y_n = n^2$ и $x_n = 2n - 1$. Если выписать в порядке возрастания все их общие члены, то получится последовательность (c_n). Напишите формулу n-го члена последовательности (c_n).

1066. При каких значениях n члены последовательности, заданной формулой $x_n = (n + 4)(n - 5)$, удовлетворяют условию $-18 \leqslant x_n \leqslant 360$?

1067. Найдите сумму первых n членов последовательности (x_n), если $x_n = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}$.

1068. В последовательности (x_n) каждый член с нечетным номером равен $2a$, а с четным равен $2b$. Напишите формулу n-го члена этой последовательности.

1069. Известно, что $y = f(x)$ — линейная функция и $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — арифметическая прогрессия. Докажите, что последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots$ является арифметической прогрессией.

1070. В арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, состоящей из целых чисел, наибольший член равен сумме квадратов остальных членов. Найдите члены этой прогрессии.

1071. Пусть a_1, a_2, ... — арифметическая прогрессия с положительными членами. Докажите, что сумма первых n членов последовательности (x_n), где $x_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, равна $\frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

1072. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию.

1073. Три различных целых числа составляют геометрическую прогрессию. Их сумма равна -3. Найдите эти числа.

1074. Три целых числа составляют арифметическую прогрессию, первый член которой 1. Если ко второму члену прибавить 3, а третий возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

1075. Докажите, что при любом натуральном значении $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{2} < \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}} < 1$$

1076. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$; б) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

1077. Докажите, что если $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, то $x = y = z$.

1078. Решите уравнение с двумя переменными

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{y} + 7 = 0.$$

1079. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + z = 8, \\ xy = -z^2. \end{cases}$$

1080. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

1081. Докажите, что при положительных значениях a, b и c верно неравенство $\frac{(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)}{abc} \geqslant 27$.

1082. Найдите при любом натуральном n значение выражения

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\ldots+n\cdot 3n\cdot 9n}}.$$

1083. Докажите, что значение выражения

$$(5+10^{n+1})(1+10+\ldots+10^n)+1$$

при любом натуральном n можно представить в виде квадрата натурального числа.

1084. Найдите наименьшее четырехзначное число, которое после умножения на 21 станет квадратом натурального числа.

1085. Трехзначное число x, кратное 5, можно представить в виде суммы куба и квадрата одного и того же натурального числа. Найдите число x.

1086. Взяли два различных натуральных числа. Эти числа сложили, перемножили, вычли из большего данного числа меньшее и разделили большее на меньшее. Оказалось, что сумма всех четырех результатов равна 441. Найдите эти числа.

1087. Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 45.

1088. Докажите, что не существует натурального числа, которое от перестановки первой цифры в конец числа увеличилось бы в 5 раз.

1089. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(65+x)^2}+4\sqrt[3]{(65-x)^2}-5\sqrt[3]{65^2-x^2}=0.$$

1090. Постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $xy^2 < x$; в) $x^3 + xy^2 - 4x \leqslant 0$;
б) $y^2 - x^2y + 2x^2 > 2y$; г) $x^2y + y^3 - y \geqslant 0$.

1091. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

а) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ |x| \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ |y| \geqslant 2. \end{cases}$

1092. В мешке содержится 2 черных и 2 белых шара. Рассматриваются события:
A — наугад извлеченные 2 шара оказываются одного цвета;
B — наугад извлеченные 2 шара оказываются разных цветов.

Игорь считает, что $P(A) = P(B)$, а Олег считает, что $P(A) < P(B)$. Кто из них прав?

1093. В мешке содержится 1 черный и 3 белых шара. Рассмотрите события:

A — наугад извлеченные 2 шара оказываются одного цвета;
B — наугад извлеченные 2 шара оказываются разных цветов.

Сравните $P(A)$ и $P(B)$.

1094. Находясь на даче у бабушки, Николай написал 3 письма Мише, Олегу и Пете. Письма он положил в конверты, надписал адреса и отправил по почте. Вечером он вспомнил, что не проверил, совпадает ли каждое письмо с соответствующим адресом. Рассмотрите следующие события:

A — все письма попадут к их адресатам;
B — ни одно письмо не попадет по назначению;
C — только одно из писем попадет по назначению;
D — только 2 письма попадут по назначению.

Найдите $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ и $P(D)$.

1095. Известно, что из 100 электрических лампочек 10 бракованных. Найдите вероятность того, что электрическая цепь, состоящая из двух соединенных последовательно лампочек (рис. 87), выбранных наугад, будет работать.

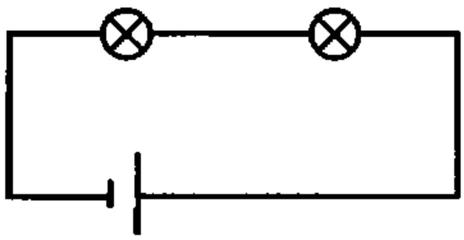


Рис. 87

1096. В мешке содержится 5 черных, 4 красных и 3 белых шара. Последовательно из мешка наугад вынимают 3 шара, причем каждый извлеченный шар возвращают в мешок перед тем, как вынимают следующий. Найдите вероятность того, что первый шар окажется черным, второй — красным и третий — белым.

1097. Два человека стреляют по мишени. Вероятность поразить мишень первым стрелком равна 0,6, а вторым — 0,3. Какова вероятность того, что если каждый сделает по одному выстрелу, то в мишени окажется только одна пробоина?

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

О функциях

Еще задолго до того, как сформировались общие понятия пере менной величины и функции, они фактически использовались і математике. Значительную роль в развитии этих понятий сыгра метод координат, созданный французскими математиками Р. Де картом (1596—1650) и П. Ферма (1601—1665). Метод координа стал широко использоваться для графического исследования функ ций и графического решения уравнений. С этого времени начался новый этап, который ознаменовался мощным развитием не тольк математики, но и всего естествознания.

Термин «функция» ввел немецкий математик Г. Лейбниц (1646—1716). У него функция связывалась с графиком.

С именами Л. Эйлера (1707—1783) и И. Бернулли (1667—1748) связано понимание функции как аналитического выражения, т. е. выражения, образованного из переменных и чисел с помощью тех или иных аналитических операций. В это время были исследованы важные классы функций, которые рассматриваются в одной из ведущих областей математики — математическом анализе.

У Л. Эйлера появился и более общий подход к понятию функции как зависимости одной переменной величины от другой. Эта точка зрения получила дальнейшее развитие в трудах русского математика Н. И. Лобачевского (1792—1856), немецкого математика П. Дирихле (1805—1859) и других ученых. В результате функцию стали рассматривать как соответствие между числовыми множествами: переменная y есть функция переменной x (на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$), если каждому значению x соответствует определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие — формулой, графиком, таблицей либо просто словами.

Одна из оригинальных функций, названная функцией Дирихле, выглядит так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Отметим, что график этой функции «разрывен» в каждой точке. Он состоит из прямой $y = 1$, у которой исключены все точки с иррациональными абсциссами, и прямой $y = 0$, у которой исключены все точки с рациональными абсциссами.

Дальнейшее развитие понятия функции связано с рассмотрением соответствий между множествами, элементами которых могут быть не только числа, но и объекты произвольной природы.

Об уравнениях высших степеней

Неполные квадратные уравнения и частные случаи полных квадратных уравнений умели решать еще вавилоняне (2 тыс. лет до н. э.). Отдельные виды квадратных уравнений решали древнегреческие математики, сводя их решение к геометрическим построениям.

Примеры решения уравнений 3-й степени не были известны ни древнегреческой, ни арабской науке. В алгебраических трактатах арабских математиков IX—XV вв., кроме решения уравнений и систем уравнений 1-й и 2-й степеней, рассматриваются решения кубических уравнений частных видов. Однако способы решения этих уравнений приводили к нахождению приближенных значений корней.

Общее уравнение 3-й степени имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$. Давно было известно, что с помощью введения новой переменной это уравнение можно свести к уравнению вида $x^3 + px + q = 0$.

Впервые формулу для отыскания положительного корня уравнения $x^3 + px = q$, где $p > 0$ и $q > 0$, вывел итальянский математик Сципион Даль Ферро (1465—1526), но держал ее в тайне. Только в конце жизни он сообщил своему ученику Фиори об открытии. Одновременно вопросом об общем решении уравнений 3-й степени занимался другой итальянский математик — Н. Тарталья (ок. 1499—1557), который нашел способы решения уравнений $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$, $x^3 = px + q$ и частных случаев уравнения $x^3 + px^2 = q$ (p и q — положительные числа). В 1535 г. между Фиори и Тартальей состоялся научный поединок, на котором Тарталья одержал блестящую победу (он за 2 ч решил все 30 предложенных ему задач, в то время как Фиори не решил ни одной задачи Тартальи).

С 1539 г. решением кубических уравнений начинает заниматься итальянский математик Д. Кардано (1501—1576). Он узнал об открытии Тартальи, который не публиковал своих трудов. В 1545 г. вышла книга Кардано «Великое искусство, или О правилах алгебры», где наряду с другими вопросами алгебры рассматриваются общие способы решения кубических уравнений. В эту книгу Кардано включил также метод решения уравнений 4-й степени, открытый его учеником Л. Феррари (1522—1565).

Вопрос о том, кому принадлежит приоритет открытия формулы корней кубических уравнений — Тарталье или Кардано, не решен до сих пор.

Следует отметить, что ни Тарталья, ни Кардано не провели полного исследования решений кубических уравнений. В решении этой задачи значительно продвинулся их соотечественник из Болоньи Р. Бомбелли (ок. 1530—1572). Полное изложение вопросов, связанных с решением уравнений 3-й и 4-й степеней, дал Ф. Виет (1540—1603), которому в этом существенно помогла усовершенствованная им алгебраическая символика.

В формуле корней квадратного уравнения используется знак корня — радикал. Через радикалы (корни 2, 3 и 4-й степеней) выражаются и корни уравнений 3-й и 4-й степеней.

После того как были найдены формулы решений уравнений 3-й и 4-й степеней, усилия многих математиков были направлены на то, чтобы отыскать формулы решений уравнений любых степеней. На решение этой проблемы ушло около 300 лет, и лишь в 20-х гг. XIX в. норвежский математик Н. Абель (1802—1829) доказал, что в общем случае корни уравнений 5-й и более высоких степеней не могут быть выражены через радикалы. Французский математик Э. Галуа (1811—1832) выделил класс алгебраических уравнений, которые разрешимы в радикалах.

Использование алгебраических уравнений позволило дать более тонкую классификацию действительных чисел. Числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, стали называть алгебраическими числами. Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, назвали трансцендентными. Оказалось, что в множестве иррациональных чисел содержится значительно больше трансцендентных чисел, чем алгебраических. Одним из представителей трансцендентных чисел является число π.

О прогрессиях

Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были еще у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания, как их решать.

В древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок. 2000 г. до н. э.) приводится такая задача: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 людьми так, чтобы разность мер ячменя, полученного каждым человеком и его соседом, равнялась $\frac{1}{8}$ меры».

В этой задаче речь идет об арифметической прогрессии. Условие задачи, пользуясь современными обозначениями, можно записать так: $S_{10} = 10$, $d = \frac{1}{8}$; найти a_1, a_2, ..., a_{10}.

В одном древнегреческом папирусе приводится задача: «Имеется 7 домов, в каждом по 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев, каждый из которых, если посеять зерно, дает 7 мер зерна. Нужно подсчитать сумму числа домов, кошек, мышей, колосьев и мер зерна».

Решение этой задачи приводит к сумме: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$, т. е. сумме пяти членов геометрической прогрессии.

О прогрессиях и их суммах знали древнегреческие ученые. Так, им были известны формулы суммы первых n чисел последовательности натуральных, четных и нечетных чисел.

Архимед (III в. до н. э.) для нахождения площадей и объемов фигур применял «атомистический метод», для чего ему потребовалось находить суммы членов некоторых последовательностей. Он вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

показал, как найти сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots.$$

Отдельные факты об арифметической и геометрической прогрессиях знали китайские и индийские ученые. Об этом говорит, например, известная индийская легенда об изобретателе шахмат (см. с. 157).

Термин «прогрессия» (от латинского *progressio*, что означает «движение вперед») был введен римским автором Боэцием (VI в.) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия «арифметическая» и «геометрическая» были перенесены на прогрессии из теории непрерывных пропорций, изучением которых занимались древние греки. Равенство вида $a_{k-1} - a_k = a_k - a_{k+1}$ они называли непрерывной арифметической пропорцией, а равенство $\frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{b_k}{b_{k+1}}$ — непрерывной геометрической пропорцией. Из этих равенств следует, что

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \text{ и } b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}},$$

т. е. этими соотношениями выражаются характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (III в.). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида «Начала» (III в. до н. э.). Правило отыскания суммы членов произвольной арифметической прогрессии встречается в «Книге абака» Л. Фибоначчи (1202). Общее правило для суммирования любой бесконечной убывающей геометрической прогрессии дает Н. Шюке в книге «Наука о числах» (1484).

О степенях

Понятие степени с натуральным показателем сформировалось еще у древних народов. Квадрат и куб числа использовались для вычислений площадей и объемов. Степени некоторых чисел использовались при решении отдельных задач учеными Древнего Египта и Вавилона.

В III в. вышла книга греческого ученого Диофанта «Арифметика», в которой было положено начало введению буквенной символики. Диофант вводит символы для первых шести степеней неизвестного и обратных им величин. В этой книге квадрат обозначается знаком Δ с индексом r (Δ^r); куб — знаком k с индексом r (k^r); квадрат, умноженный на себя, — квадрато-квадрат обозначается $\Delta^r\Delta$; квадрат, умноженный на куб, — квадрато-куб — Δk^r; куб, умноженный сам на себя, — кубо-куб — $k^r k$.

В конце XVI в. Франсуа Виет ввел буквы для обозначения в уравнениях не только неизвестных, но и коэффициентов. Он применял сокращения: N (Numerus — число) — для первой степени, Q (Quadratus — квадрат) — для второй, C (Cubus — куб) — для третьей, QQ — для четвертой и т. д.

Современная запись степеней (a^3, a^4, a^5 и т. д.) была введена Декартом, причем вторую степень a, т. е. a^2, он записывал как произведение aa.

К идее обобщения понятия степени на степень с ненатуральным показателем математики пришли постепенно. Отрицательные и дробные показатели степеней появились в отдельных трудах европейских математиков XIV—XV вв. (Н. Орем, Н. Шюке). Современные определения и обозначения степени с нулевым, отрицательным и дробным показателями берут начало от работ английских математиков Д. Валлиса (1616—1703) и И. Ньютона (1643—1727).

О теории вероятностей

Зарождение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с именами французских ученых Б. Паскаля (1623—1662) и П. Ферма (1601—1665) и голландского ученого X. Гюйгенса (1629—1695). Ими были рассмотрены многие задачи, возникающие в так называемых азартных играх, в частности в играх, связанных с выпадением различных комбинаций очков при бросании игрального кубика.

Понятие вероятности случайного события было введено швейцарским ученым Я. Бернулли (1654—1705). С его исследований теория вероятностей берет начало как самостоятельная математическая дисциплина. Он доказал первоначальный вариант закона больших чисел, устанавливающего связь между вероятностью события и частотой его появления, написал первый учебник по теории вероятностей.

В те же годы в связи с задачами теории вероятностей была развита комбинаторика, появились понятия размещения, перестановки, сочетания.

В XVIII в. началось бурное развитие теории вероятностей, которое продолжается до настоящего времени.

Первыми продолжателями работ Я. Бернулли были в Англии А. Муавр (1667—1754), во Франции П. Лаплас (1749—1827), в Германии К. Гаусс (1777—1855). Ими было дано систематическое изложение теории вероятностей с приложением ее результатов к анализу ошибок наблюдения, к математической обработке экспериментальных данных.

В середине XIX в. в России создается знаменитая петербургская математическая школа во главе с выдающимся русским ученым П. Л. Чебышевым (1821—1894). В его исследованиях по теории вероятностей закон больших чисел установлен в весьма общей форме. Этот закон в современной трактовке ведет свое начало от работ П. Л. Чебышева.

Теория вероятностей занимала важное место в петербургской школе. В. Я. Буняковский (1804—1889) издал первый учебник теории вероятностей на русском языке (1846), содержавший также приложения к статистике и демографии. Работы Чебышева по теории вероятностей продолжили его ученики А. А. Марков (1856—1922), изучавший, в частности, последовательности случайных испытаний (такие последовательности называют теперь марковскими цепями), и А. М. Ляпунов (1857—1918), разработавший широко применяемый в теории вероятностей метод характеристических функций.

Велики заслуги в развитии теории вероятностей советских ученых. С. Н. Бернштейн (1880—1968) разработал первую аксиоматику теории вероятностей. А. Я. Хинчин (1894—1959) изучал стационарные случайные процессы, разработал математические методы теории массового обслуживания. А. Н. Колмогоров (1903—1987) предложил общепринятую в настоящее время систему аксиоматического обоснования теории вероятностей, развил теорию стационарных и марковских случайных процессов. А. Н. Колмогоров внес важный вклад в теорию информации, теорию стрельбы, статистические методы контроля массовой продукции.

Современная теория вероятностей находит широкое применение в самых различных областях знаний: в физике, астрономии, биологии, экономике, лингвистике, информатике и других научных дисциплинах. Методы теории вероятностей широко используются на практике в статистике, демографии и т. д.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–8 КЛАССОВ

Выражения и их преобразования

1. Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, называют целыми выражениями. При этом произведение одинаковых множителей может быть записано в виде степени. К целым выражениям относят и выражения, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на число, отличное от нуля. Например, выражения $a^2 + 3ab - 2b^2$, $(x - y)(2x + y^2)$, $m - \frac{n}{3}$, $a^2 : 7$ целые.

Выражения, составленные из чисел и переменных, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на выражение с переменными, называют дробными выражениями. Например, выражения $x + \frac{1}{x-1}$, $\frac{a+2}{b}$, $5m : n$ дробные.

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Дробное выражение при некоторых значениях переменных может не иметь смысла. Например, выражение $a + \frac{1}{a-2}$ не имеет смысла при $a = 2$, выражение $\frac{3}{x-y}$ не имеет смысла при $x = y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменных.

2. Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Два выражения, принимающие равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют тождественно равными, а замену одного выражения другим, тождественно равным ему, — тождественным преобразованием выражения.

3. Одночленами называют произведения чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. Например, $8a^3b$, $-1{,}5xy^2z^8$, 12, c, m^{10} — одночлены.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех входящих в него переменных. Например, степень одночлена $9a^7b$ равна 8.

4. Многочленом называется сумма одночленов. Например, $y^4 - 8y^3 + 2y - 3$, $4a^4b + 11a^2b^2 - ab + 3b - 1$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $18a^6 - 7a^4b^3 + 1$ равна степени одночлена $-7a^4b^3$, т. е. равна 7.

Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

5. При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Например, $(5x^2 - 3xy) + (4xy - 2x^2 + 1) = 5x^2 - 3xy + 4xy - 2x^2 + 1 = 3x^2 + xy + 1$.

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Например, $(8a^2 - 3ab) - (7a^2 - 4ab + 5) = 8a^2 - 3ab - 7a^2 + 4ab - 5 = a^2 + ab - 5$.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например, $2x^2(3x^3 - xy + 5y^2) = 6x^5 - 2x^3y + 10x^2y^2$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например, $(2a - 3)(3a^2 + a - 4) = 6a^3 + 2a^2 - 8a - 9a^2 - 3a + 12 = 6a^3 - 7a^2 - 11a + 12$.

Любое целое выражение можно представить в виде многочлена.

6. Формулы сокращенного умножения.

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

в) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на

9 – Ю. Н. Макарычев, 9 кл.

второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.

г) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения.

д) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

е) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

ж) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

7. Разложением многочлена на множители называют представление многочлена в виде произведения многочленов.

Для разложения многочленов на множители применяют вынесение множителя за скобки, группировку, используют формулы сокращенного умножения. Например, многочлен $8a^3 - 6ab$ можно разложить на множители, вынося $2a$ за скобки: $8a^3 - 6ab = 2a(4a^2 - 3b)$; многочлен $2ab + 10b - 3a - 15$ можно разложить на множители, используя группировку:

$$2ab + 10b - 3a - 15 = (2ab + 10b) - (3a + 15) =$$
$$= 2b(a + 5) - 3(a + 5) = (a + 5)(2b - 3);$$

многочлен $9a^2 - 25b^4$ можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов:

$$9a^2 - 25b^4 = (3a)^2 - (5b^2)^2 = (3a - 5b^2)(3a + 5b^2).$$

8. Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b — многочлены.

При любых значениях a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, верно равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Свойство дроби, выраженное тождеством $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, называют основным свойством дроби. Основное свойство дроби используется при сокращении дробей. Например:

$$\frac{x^2 + 2xy}{4y^2 + 2xy} = \frac{x(x + 2y)}{2y(x + 2y)} = \frac{x}{2y};$$

$$\frac{a^3 - 8}{3a^2 + 6a + 12} = \frac{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)}{3(a^2 + 2a + 4)} = \frac{a - 2}{3}.$$

Если изменить знак числителя (или знак знаменателя) дроби и знак перед дробью, то получим выражение, тождественно равное данному:

$$-\frac{-a}{b} = \frac{a}{b}, \quad -\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

9. Действия над рациональными дробями.

а) Если $c \neq 0$, то

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ и } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же. Например:

$$\frac{3x-8y}{5xy} + \frac{2x-7y}{5xy} = \frac{3x-8y+2x-7y}{5xy} = \frac{5x-15y}{5xy} = \frac{5(x-3y)}{5xy} = \frac{x-3y}{xy}.$$

Чтобы выполнить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же. Например:

$$\frac{x^2}{3x-6} - \frac{4}{3x-6} = \frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}.$$

б) Чтобы выполнить сложение или вычитание дробей с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю и затем применить правило сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Например:

$$\frac{a^2}{ab-b^2} + \frac{b^2}{ab-a^2} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{b(a-b)} + \frac{b^2}{a(b-a)} - \frac{b}{a} =$$

$$= \frac{a^3-b^3-ab^2+b^3}{ab(a-b)} = \frac{a(a^2-b^2)}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)} = \frac{a+b}{b}.$$

в) Если $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и перемножить их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби. Например:

$$\frac{c^2-4}{c^2} \cdot \frac{c}{3c-6} = \frac{(c^2-4)c}{c^2(3c-6)} = \frac{(c-2)(c+2)}{3c(c-2)} = \frac{c+2}{3c}.$$

г) Если $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй. Например:

$$\frac{x^3-8}{12x} : \frac{x-2}{6} = \frac{x^3-8}{12x} \cdot \frac{6}{x-2} = \frac{6(x-2)(x^2+2x+4)}{12x(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{2x}.$$

Любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

10. Степень с целым показателем.

Если n — натуральное число, большее 1, и a — любое число, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Если $n = 1$ и a — любое число, то

$$a^1 = a.$$

Если $n = 0$ и a — число, отличное от нуля, то

$$a^0 = 1.$$

Если n — целое отрицательное число и a — отличное от нуля число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

11. Свойства степени с целым показателем.

а) $a^m a^n = a^{m+n}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

б) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

в) $(a^m)^n = a^{mn}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели степеней перемножают.

г) $(ab)^n = a^n b^n$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, n — целое число.

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, n — целое число.

При возведении в степень дроби возводят в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записывают в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

12. Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Арифметический квадратный корень из a обозначают $\sqrt{a}$. Выражение, стоящее под знаком корня, называют подкоренным выражением. Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл для всех $a \geqslant 0$ и не имеет смысла при $a < 0$.

Свойства арифметического квадратного корня.

а) Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

б) Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

в) При любом значении a верно равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Уравнения

13. Корнем уравнения с одной переменной называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 2 — корень уравнения $x^3 - x = 4x^2 - 10$, так как верно равенство $2^3 - 2 = 4 \cdot 2^2 - 10$.

Решить уравнение с одной переменной — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

14. Уравнения, в которых левая и правая части являются рациональными выражениями, называются рациональными. Если и левая и правая части рационального уравнения являются целыми выражениями, то уравнение называют целым. Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют дробным.

15. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни, называются равносильными. Например, уравнения $x^2 = 36$ и $(x - 6)(x + 6) = 0$ равносильные. Каждое из них имеет два корня: -6 и 6. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Уравнения обладают следующими свойствами:

если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

16. Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа. Число a называется коэффициентом при переменной, число b — свободным членом.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $\frac{b}{a}$. Например, уравнение $5x = 3$ имеет корень 0,6.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней. Например, уравнение $0 \cdot x = 9$ не имеет корней.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения $ax = b$ является любое число.

17. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Число a называют первым коэффициентом, b — вторым коэффициентом и c — свободным членом.

Квадратное уравнение, в котором первый коэффициент равен 1, называют приведенным квадратным уравнением.

18. Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$. Такие уравнения обычно решают разложением его левой части на множители. Например, $3x^2 - 15x = 3x\,(x - 5) = 0$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ имеет два корня: $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, если $-\frac{c}{a} > 0$, и не имеет корней, если $-\frac{c}{a} < 0$. Решают такие уравнения, сводя их к уравнениям вида $x^2 = m$. Например, $0{,}5x^2 - 18 = 0$, $0{,}5x^2 = 18$, $x^2 = 36$, $x_1 = -6$, $x_2 = 6$.

19. Дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют выражение $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня; если $D = 0$, то один корень; если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $D \geqslant 0$ находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Для квадратного уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ формулу корней можно записать так:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

20. Теорема Виета: сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Иначе говоря, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$.

Из теоремы Виета следует, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема, обратная теореме Виета: если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

21. При решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить получившееся целое уравнение;
4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Решим, например, уравнение

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2}{x^2-2x} - \frac{x+1}{2-x}.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на $x(x-2)$, получим $2x^2 = 2 + x(x+1)$. Это уравнение приводится к квадратному уравнению $x^2 - x - 2 = 0$, имеющему корни 2 и -1. При $x = 2$ общий знаменатель дробей исходного уравнения обращается в нуль, этот корень нужно исключить. При $x = -1$ общий знаменатель $x(x-2)$ в нуль не обращается, следовательно, число -1 является корнем исходного уравнения.

22. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство. Например, пара чисел $x = -5$, $y = 3$ является решением уравнения $x^2 - 4y = 13$. Это решение можно записать так: $(-5; 3)$.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — числа.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения, не имеющие решений, также считают равносильными.

23. Каждое решение $(x; y)$ уравнения с двумя переменными можно изобразить в координатной плоскости точкой с координатами x и y. Все такие точки образуют график уравнения.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

24. Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство. Например, пара чисел $x = 3$, $y = 8$ — решение системы

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 19. \end{cases}$$

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Системы уравнений, не имеющие решений, также считают равносильными.

Для решения систем уравнений с двумя переменными используются способ подстановки, способ сложения, графический способ.

Неравенства

25. Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; пишут: $a > b$. Число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число; пишут: $a < b$.

Если a больше b или a равно b, то пишут: $a \geqslant b$. Если a меньше b или a равно b, то пишут: $a \leqslant b$.

Неравенства, составленные с помощью знака $>$ или $<$, называют строгими. Неравенства, составленные с помощью знака $\geqslant$ или $\leqslant$, называют нестрогими.

26. Свойства числовых неравенств.

а) Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.

б) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

в) Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

г) Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$;

если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

27. Сложение и умножение числовых неравенств.

а) Если $a < b$ и $c < d$, то

$$a + c < b + d.$$

Если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

б) Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то

$$ac < bd.$$

Если перемножить почленно верные неравенства одного знака, левые и правые части которых положительные числа, то получится верное неравенство.

Если a и b — положительные числа, $a < b$ и n — натуральное число, то $a^n < b^n$.

28. Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Например, число 1,8 — решение неравенства $5x < 10$. Этому неравенству удовлетворяет и любое другое число, меньшее 2.

Решить неравенство с одной переменной — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

29. Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Неравенства с одной переменной обладают следующими свойствами:

если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство;

если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;

если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

30. Числовой промежуток $[a; b]$ — это множество всех чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x \leqslant b$.

Числовой промежуток $(a; b)$ — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < b$.

Числовой промежуток $[a; b)$ — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x < b$.

Числовой промежуток $(a; b]$ — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x \leqslant b$.

Числовые промежутки $[a; +\infty)$ и $(a; +\infty)$ — это множества всех чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x \geqslant a$ и $x > a$.

Числовые промежутки $(-\infty; b]$ и $(-\infty; b)$ — это множества всех чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x \leqslant b$ и $x < b$.

Числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$ — это множество всех действительных чисел.

31. Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$, где a и b — некоторые числа, а x — переменная, называются линейными неравенствами с одной переменной.

32. Если ставится задача найти общие решения нескольких неравенств, то говорят, что надо решить систему неравенств.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему неравенств — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Функции

33. Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y. Независимую переменную x иначе называют аргументом, а о зависимой переменной y говорят, что она является функцией этого аргумента. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

34. Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа. Ее областью определения является множество всех действительных чисел.

Графиком линейной функции является прямая. Число k называют угловым коэффициентом прямой, являющейся графиком функции $y = kx + b$.

Если $k \neq 0$, то график функции $y = kx + b$ пересекает ось x; если $k = 0$ и $b \neq 0$, то прямая — график функции $y = kx + b$ — параллельна оси x; если $k = 0$ и $b = 0$, то график функции совпадает с осью x.

35. Графики двух линейных функций пересекаются, если их угловые коэффициенты различны, и параллельны, если их угловые коэффициенты одинаковы.

36. Линейную функцию, задаваемую формулой $y = kx$ при $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

График прямой пропорциональности есть прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвертой координатных четвертях.

37. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — не равное нулю число. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ принимает отрицательные значения, если $x < 0$, и положительные значения, если $x > 0$.

При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ принимает положительные значения, если $x < 0$, и отрицательные значения, если $x > 0$.

График обратной пропорциональности — гипербола. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвертой координатных четвертях.

38. Областью определения функции $y = x^2$ является множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, а при $x \neq 0$ принимает положительные значения. График функции $y = x^2$ — парабола. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

39. Областью определения функции $y = x^3$ является множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, принимает отрицательные значения, если $x < 0$, и положительные значения, если $x > 0$. График функции $y = x^3$ проходит через начало координат и расположен в первой и третьей координатных четвертях. Он симметричен относительно начала координат.

40. Область определения функции $y = \sqrt{x}$ — множество всех неотрицательных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, при $x > 0$ функция принимает положительные значения. График функции $y = \sqrt{x}$ расположен в первой координатной четверти, он представляет собой ветвь параболы.

Действительные числа. Приближенные вычисления

41. Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Всякое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Положительные бесконечные десятичные дроби, противоположные им числа и число нуль образуют множество действительных чисел.

Число, которое можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, называют иррациональным числом.

Каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой, и каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число.

42. Стандартным видом числа α называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число, число n называют порядком числа. Например, $73\ 000 = 7{,}3 \cdot 10^4$; $0{,}0026 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$.

43. Абсолютной погрешностью приближенного значения числа называется модуль разности точного и приближенного значений. Например, абсолютная погрешность приближенного значения 0,3 числа $\frac{1}{3}$ равна

$$\left|\frac{1}{3} - 0{,}3\right| = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}.$$

Если абсолютная погрешность приближенного значения не превосходит некоторого числа h, то это значение называют приближенным значением с точностью до h. Например, 1,41 является приближенным значением $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01.

Если число x равно a с точностью до h, то пишут: $x = a \pm h$. При этом число h обычно берут с одной или двумя значащими цифрами. Например, $\sqrt{3} = 1{,}73 \pm 0{,}01$.

44. Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.

Относительную погрешность обычно выражают в процентах. Например, при округлении дроби 25,4 до единиц получается приближенное значение 25. Его относительная погрешность равна

$$\frac{|25{,}4 - 25|}{25} = \frac{0{,}4}{25} = 0{,}016 = 1{,}6\%.$$

Элементы статистики

45. Среднее арифметическое, мода, медиана, размах, среднее гармоническое — статистические характеристики.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Модой ряда называется число, которое встречается в ряду чаще других. Ряд может иметь более одной моды, а может не иметь моды совсем.

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Например, медиана ряда чисел

$$17,\ 21,\ 27,\ 29,\ 32,\ 37,\ 41$$

равна 29, а медиана ряда чисел

$$28,\ 43,\ 54,\ 56,\ 58,\ 62$$

равна 55.

Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Средним гармоническим ряда положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n называется число $a_{ср}$, которое вычисляется по формуле

$$a_{ср} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

46. Вся изучаемая совокупность данных называется генеральной совокупностью. В случаях, когда сложно или даже невозможно

провести сплошное исследование генеральной совокупности, составляется выборочная совокупность (выборка), которая подвергается исследованию. При этом выборка должна быть репрезентативной (представительной), т. е. достаточной по объему и отражающей характерные особенности исследуемой генеральной совокупности.

47. Для обобщения и систематизации данных, полученных в результате исследования, иногда их по какому-либо признаку разбивают на группы и результаты группировки представляют в виде таблицы частот или относительных частот.

Если в ряду чисел имеется большое число данных и одинаковые данные встречаются редко, то для анализа данных образуют интервальный ряд, указывая для каждого интервала соответствующую частоту или относительную частоту.

48. Для наглядного представления данных, полученных в результате статистического исследования, используют столбчатые и круговые диаграммы, полигоны и гистограммы.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Глава I

4. 24. **7.** а) $x = -2$; б) $x = -14$; в) не существует. **8.** а) -2; б) 8; в) 13. **9.** а), б), д) x — любое число; в) $x \neq 5$; г) $x \neq -1$ и $x \neq 4$; е) $x \geqslant 5$. **11.** а) x — любое число; б) $x \neq -1$; в) $x \geqslant -9$. **12.** $h = \frac{3}{8}t$; а) ≈ 51 м; б) 160 с. **13.** а) 36 км; б) ≈ 490 м/с. **14.** а) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; б) $(-\infty; 0{,}5]$. **18.** а) $[1; 7]$; б) $[-7; 14]$. **20.** $(-\infty; +\infty)$; $[0; 1)$. **21.** $P(x) = 2x + 20$, где $10 < x \leqslant 40$; $(40; 100]$. **29.** а) $\frac{2}{3}$; б) 5. **30.** д) $\pm\sqrt{2}$; е) 0; $-\frac{1}{15}$. **31.** в) $-0{,}5$; 3; г) 1; $1\frac{2}{3}$. **40.** а) 15; б) -6 и $3\frac{1}{3}$; в) -2; г) нулей нет. **41.** а) Имеет, $x = 33\frac{1}{3}$; б) имеет, $x = 0$ и $x = 2$; в) имеет, $x = 6$. **42.** а) $[-6; -5) \cup (-5; +\infty)$, $y = 0$ при $x = 3$; б) $(-\infty; 1) \cup \left(1; 1\frac{2}{3}\right]$ $y = 0$ при $x = -6\frac{1}{4}$ и $x = 0$. **45.** а) При $a > 2$; б) при $a < 2$; в) при $a = 2$. **51.** а) Возрастающая; б) убывающая; в) возрастающая. **52.** а) 0; 6; б) $\pm\sqrt{5}$; в) 0; $-8{,}5$; г) корней нет. **56.** а) 0; 7; б) 2,5; в) -2; 0; 2; г) -2; 2. **59.** а) -3; 2; б) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; в) -20; 5; г) $-\frac{1}{4}$; д) корней нет; е) 0; 5. **60.** а) -1; $\frac{1}{2}$; б) 3; в) $1 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; г) -1; 1. **63.** 1; 4. **68.** При $x = 1$; наименьшее значение равно 4. **69.** При $x = -3$; наименьшее значение равно 1. **71.** 145 м. **72.** а) При $x = 2$; б) при $x > 2$; в) при $x < 2$. **73.** а) 0,018 м; б) 0,018 м. **74.** а) $-2\frac{2}{3}$; -2; б) -2; $2\frac{1}{15}$. **76.** в) $\frac{1}{6}(x + 1)(x + 2)$; д) $-(y - 1)(y - 15) = (1 - y)(y - 15)$; ж) $2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x - 3)$. **77.** а) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$; б) $-(3x - 2)^2$; в) $(4a + 3)^2$; г) $(0{,}5m - 2)^2$. **78.** б) $-(m - 2)(m - 3) = (2 - m)(m - 3)$; в) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = (3x - 1)(x + 2)$; г) $6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (3x - 2)(2x - 3)$. **81.** Нельзя. **82.** Например, $x^2 + 3x + 2$. **83.** а) $\frac{4}{3x - 1}$; б) $\frac{2a + 1}{3}$; в) $-\frac{4 + b}{b + 3}$; г) $\frac{2y + 1}{y - 3}$; д) $\frac{1 - p}{p + 2}$; е) $-\frac{x + 6}{x + 5}$. **85.** а) $-0{,}3$; $-0{,}93$; $-0{,}993$; б) 3; $1\frac{2}{7}$; $1\frac{1}{6}$. **87.** а) -1; 23; б) 2; $2\frac{1}{3}$. **97.** а) Да; б) да; в) нет. **98.** $(-3; -9)$; $(1; -1)$. **99.** Имеют; $(1000; 10\,000)$. **100.** При $k = -4$ и $k = 4$.

104. а) $\frac{1}{5a+2}$; б) $\frac{1-3a}{2a+1}$. **114.** а) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; б) нулей нет; в) нулей нет. **115.** При $a < 0$. **117.** а) Корней нет; б) 0; 2,8. **118.** а) $(-\infty; 2{,}9)$; б) $[0{,}25; +\infty)$; в) $[-1{,}8; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}2)$. **129.** $b = -1$. **130.** При $n = 5$; $(-1; 13)$. **131.** $\frac{3a-1}{a+2}$. **133.** а) $1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$; б) -2; $2\frac{1}{3}$. **134.** 100 га. **135.** 8 машин. **156.** а) $\frac{3y-1}{y^2-1}$; б) $\frac{24}{25-4x^2}$. **160.** д) 1,5; е) 1,5. **161.** б) 11; г) −3. **168.** д) 0; е) 10. **171.** в) 12; г) −64. **172.** в) 48; г) −54. **178.** а) 1; б) −2. **179.** $\frac{2a-12}{3a+15}$. **180.** а) $x = 3$, $y = -2$; б) $x = -2$, $y = -3$. **182.** а) $x = 2$, $y = 1$; б) $x = -3$, $y = -1$. **185.** 1 и 3. **186.** (4; 13), (14; 3). **187.** (−7; 9), (−1; 15), (1; 1), (7; 7). **189.** а) 0; 4; б) 1; 3; в) корней нет. **200.** а) $(-\infty; -6) \cup (-6; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $[4; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. **201.** $y = 10x$, где $0 \leqslant x \leqslant 7$; [0; 70]. **202.** $y = 1{,}5x$, где $0 \leqslant x \leqslant 4$; [0; 6]. **203.** График не пересекает ось x, а ось y пересекает в точке (0; 1). Он расположен в I и II координатных четвертях. **204.** $l = \begin{cases} 20t, \text{ если } 0 \leqslant t < 3, \\ 60, \text{ если } 3 \leqslant t < 5, \\ -12t + 120, \text{ если } 5 \leqslant t \leqslant 10. \end{cases}$ **209.** а) 4; б) 1. **210.** $y = x^2 + 5$, $y = -x^2 - 4$, $y = \sqrt{x} + 1$, $y = x^4 + x^2 + 6$. **214.** а) −6; 2; б) $\frac{2 \pm \sqrt{22}}{6}$; в) $\frac{4 \pm \sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$. **216.** При $p = -1{,}5$; $-\frac{2}{3}$. **218.** $x^2 + x - 2$. **219.** $\alpha = 1$, $\beta = 4$ или $\alpha = 4$, $\beta = 1$. **222.** а) $3\frac{2}{3}$; б) 12. **223.** При $a = b = 20$. **225.** −1 и 1, или −1 и 3, или −1 и −3, или −1 и −1. **226.** $x^2 + 5x + 1$. **227.** а) $\frac{2(m-2)}{m+4}$; б) $\frac{2m-1}{n-3}$. **228.** а) $\frac{4(x-4)}{4x+1}$; б) $\frac{x-1}{x+1}$; в) $x^2 - 5x$; г) $\frac{x+6}{3}$; д) $\frac{x+2}{x+1}$; е) $\frac{3x-1}{x-1}$. **229.** а) При $a = -0{,}28$; б) при $a = 3$; в) при $a = -2$; г) при $a = 0{,}001$. **238.** а) При $c > 13$; б) при $c > 8$. **239.** При $b = -12$, $c = 24$. **240.** При $a = 2$. **241.** При $a > 0$ и $c \leqslant 0$; при $a < 0$ и $c \geqslant 0$. **242.** При $a = -6$ и $b = 26$. **257.** в) 3; г) 3,5; д) −0,5; е) $\frac{1}{32}$. **259.** г) При $a \geqslant 1\frac{2}{3}$; е) при $b \geqslant 1{,}5$.

Глава II

266. а) −2; б) −0,2; 0,2; в) −3,5; 2; г) −0,5; 0,5. **267.** а) 0; 5,5; б) −7; в) $1\frac{1}{3}$; г) $-6\frac{1}{3}$; 5. **270.** 6 см. **271.** 17 и 12 или −12 и −17. **272.** а) $-\sqrt{6}$; 0; $\sqrt{6}$; б) 0; в) 0; 1,5; 2; г) −0,2; 0; 0,5; д) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2; е) −4; 0; 1; 4; ж) −1; 1; з) −1; 0; 1; 3. **274.** а) $-3-\sqrt{15}$; −1; $-3+\sqrt{15}$. Указание. Представьте $7x^2$ в виде $x^2 + 6x^2$; б) $-2{,}5-\sqrt{1{,}25}$; $-2{,}5+\sqrt{1{,}25}$; 1.

275. (1; 0), (2; 0), (3; 0) и (0; −6). Указание. Представьте $-6x^2$ в виде $-x^2 - 5x^2$. **276.** а) −2; 2; б) −1; 1; 3; в) −3; 2; г) −1,5; 1; $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. **277.** а) −2; −1; 1; 2; б) 2; в) −4; 3. **278.** а) −3; 3; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; −2; 2; в) корней нет; г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; −1; 1; д) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; е) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **279.** а) −3; 3; −4; 4; б) корней нет; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; −2; 2; е) корней нет. **280.** а) (−2; 0), (2; 0), (−1; 0), (1; 0) и (0; 4); б) $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$ и (0; −10); в) $(-\sqrt{10}; 0)$, $(\sqrt{10}; 0)$ и (0; 100); г) (0; 0). **282.** а) Корней нет; б) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; −2; 2. **283.** а) −1; 1; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; б) 1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **284.** а) 1; б) −2; 1; 2. **286.** а) $(-\infty; 8{,}6)$; б) $(-2{,}5; +\infty)$. **287.** За 66 ч и 55 ч. **288.** а) 0; −3; б) 0; в) 0. **289.** а) $-\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}4}$; б) 4. **290.** а) 10; б) 0. **291.** а) −1; 7; б) 2; $8\frac{2}{3}$; в) 4. **292.** а) 1,5; б) −0,5. **293.** а) 8,2; 13; б) −6,6; 3. **294.** а) 3,2; 8; б) $-1\frac{3}{4}$; 2. **295.** а) (−1; −9), (−3; −3), (3; 3). **296.** а) −1,4; −0,5; 0,5; б) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2. **297** а) −1; 3; б) −4; 3; в) −2; 4. **298.** а) 1; 2,8; 6; б) 2; 5; $7+4\sqrt{2}$; $7-4\sqrt{2}$. **299.** а) $-\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Введите новую переменную $y = x - \frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{3}$; 3; $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. **300.** $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$. **303.** 24 дня и 12 дней. **304.** а) (−8; 6); б) $(-\infty; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$; г) (1; 1,2); д) $x \neq 1{,}5$; е) решений нет; ж) (0; 0,9); з) $(-\infty; 0) \cup (3{,}5; +\infty)$. **305.** а) $(-\infty; -2{,}5] \cup [1; +\infty)$; б) [−2; 3]; в) $(-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$. **306.** а) $(-\infty; -7) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $x \neq \frac{2}{3}$; в) $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right]$; г) $(-\infty; -4{,}5] \cup [2; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$. **307.** а) При $x < -1{,}5$ и $x > -1$; б) при $x \neq -\frac{1}{6}$. **308.** а) (−4; 4); б) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right) \cup [0; +\infty)$; д) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; е) $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$. **309.** а) [−10; 10]; б) $(-\infty; -2\sqrt{6}) \cup (2\sqrt{6}; +\infty)$; в) [−4; 0]; г) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0{,}4; +\infty)$; е) $(-\infty; -0{,}5) \cup (0; +\infty)$.

310. а) При $b < -6$ и $b > 6$; б) при $b < -\sqrt{15}$ и $b > \sqrt{15}$. 311. а) При $-12 < t < 12$; б) при $-3 < t < 3$. 312. а) $\left(-7; -\frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right) \cup \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) x — любое число; г) $\left(-\infty; \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$.

313. а) $(-\infty; -1) \cup (4{,}5; +\infty)$; б) $x \neq \frac{1}{4}$. 314. а) $[0; 4]$; б) все числа, кроме 3. 318. Не превосходит 5 см. 319. Больше 4 см. 320. а) $(-2; 3)$; б) $(4; 6)$; в) $(-12; -2) \cup (8; 10)$; г) $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$; д) $[1; 8]$; е) решений нет.

321. а) 2, 3, 4, 5; б) 2, 3, 4. 323. а) -5; 5; б) $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$. 324. 7 кг. 325. а) $(-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$; б) $(-10; 14)$; в) $(-\infty; -8{,}5] \cup [3{,}5; +\infty)$; г) $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{8}\right]$ 326. а) $(-25; 30)$; б) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$; в) $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$; г) $(-\infty; -6{,}3] \cup [-0{,}1; +\infty)$. 327. а) $(2; 5) \cup (12; +\infty)$; б) $(-\infty; -7) \cup (-1; 4)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty)$. 328. а) $(-48; 37) \cup (42; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}7) \cup (2{,}8; 9{,}2)$. 329. а) $(-\infty; -9) \cup (2; 15)$; б) $(-6; 0) \cup (5; +\infty)$; в) $(1; 4) \cup (8; 16)$. 330. б) $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{7}\right]$ в) $(-12; 3)$; г) $\left[-6; \frac{1}{3}\right]$. 331. а) $(-\infty; 18) \cup (19; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}9) \cup (3{,}2; +\infty)$; в) $[-3; 8{,}5]$; г) $[0{,}3; 8]$. 332. а) $[-8; 5]$; б) $[-12; 1] \cup [9; +\infty)$. 333. а) $(-\infty; -2{,}5] \cup [17; +\infty)$; б) $[-9; 0] \cup [4; +\infty)$. 334. а) $(-6; 5)$; б) $(-\infty; -3{,}8) \cup (1{,}4; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (1{,}6; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}3) \cup (4; +\infty)$.

335. а) $(-7; 21)$; б) $(-\infty; -4{,}7) \cup (7{,}2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$; г) $(0; 3)$. 336. а) $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$; б) $[-6; 5)$; в) $(0; 2]$; г) $(-\infty; 1) \cup [1{,}5; +\infty)$. 337. а) $(-16; -4)$; б) $(-\infty; 2) \cup (2{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0{,}5; +\infty)$; г) $(-4; -1{,}2)$. 338. а) $(-4; 0)$; б) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; в) $(1; 2]$; г) $(-\infty; -2) \cup [1{,}5; +\infty)$. 339. а) $y = -4x$; б) $y = 1{,}6x + 4$. 340. 2 л и 3 л. 342. а) 2; $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$; б) -3; -2; 1; 2. 343. а) -3; 2; б) -1; $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$. 344. $(-3; 0)$, $(-2; 0)$, $(1; 0)$ и $(0; -6)$. 345. $a = 5$; $(-4; 0)$, $(2; 0)$, $(3; 0)$. 346. а) -1; 1; б) -1; 1. 347. а) -10; -4; 2. Указание. Используйте подстановку $y = (x + 4)^2$; б) 2; 4; $3 - \sqrt{77}$; $3 + \sqrt{77}$. 348. а) 4; б) -2. 350. $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 2; 5. 352. а) 0; -1; 1; б) 0; -2; 2; в) 0; -8; 8; г) 0; $-2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$. 353. а) 0; -5; 5; б) 0; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. 354. а) 1; 2; б) -1; $-\frac{1}{2}$; 1; в) -2; 0,8; 5; г) -1; $\frac{1}{6}$; 6. 355. а) -1. Указание. Представьте $2x^2$ в виде $x^2 + x^2$; б) -1; $\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$.

358. а) $-3-\sqrt{6}$; $-3+\sqrt{6}$; $-3-\sqrt{17}$; $-3+\sqrt{17}$; б) -2; 4; $1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$; в) корней нет; г) -4; 0; д) $-1-\sqrt{2}$; $-1+\sqrt{2}$; е) -4; 5; ж) $-4{,}5$; 1; $\frac{-7-\sqrt{65}}{4}$; $\frac{-7+\sqrt{65}}{4}$. **359.** а) 1; б) -1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **360.** а) $-\frac{1}{2}$; б) -1; 2. **364.** а) -3; 3; б) -1; 1. **365.** $-5{,}6$; 4. **366.** а) -7; 15; б) $-2\frac{1}{3}$; 5. **367.** а) 3; 10; б) $-2\frac{2}{3}$; 4. **368.** 4. **369.** а) -1; $\frac{11-\sqrt{57}}{8}$; $\frac{11+\sqrt{57}}{8}$; б) -1; $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$; $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$. **370.** а) 1; б) 2; $2\frac{1}{2}$. **371.** а) -1; 1; б) 0. **372.** а) 1,4; 3; б) 3; 9. **373.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$; 3. **374.** 2; $\frac{1}{2}$. **375.** а) $-2{,}5-\sqrt{5{,}25}$; $-2{,}5+\sqrt{5{,}25}$; $2{,}5-\sqrt{5{,}25}$; $2{,}5+\sqrt{5{,}25}$; б) $-2-\sqrt{5}$; $-2+\sqrt{5}$; $2-\sqrt{5}$; $2+\sqrt{5}$; -1; 1. **376.** б) $[-9; 1]$; в) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; -1{,}75] \cup [1{,}5; +\infty)$; д) x — любое число; е) $x \neq \frac{1}{3}$. **378.** а) $(-4; 4)$; б) $x \neq -2$. **379.** При $-4 < a < -2$ и $-2 < a < 6$. **380.** При $b < 2-\sqrt{10}$ и $b > 2+\sqrt{10}$. **381.** а) При $c > 36$; б) при $c > -20$. **382.** а) При $0 < k < 42{,}25$; б) при $k = 42{,}25$ и $k < 0$. **383.** $[-3; 1]$. **384.** а) $(7; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ в) $(-\infty; -3)$; г) $(4; 5)$. **385.** а) $(-1; 2)$; б) $(1; 4)$. **386.** а) $(-\infty; -1{,}2) \cup (4; 6)$; б) $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -1{,}6) \cup (-0{,}6; 1{,}2)$; г) $(-\infty; -1{,}8) \cup (1{,}7; 1{,}9)$. **387.** а) -4; $1\frac{2}{3}$; 2; б) $(-\infty; -4) \cup \left(1\frac{2}{3}; 2\right)$; в) $\left(-4; 1\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. **388.** а) $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$; б) $(7{,}3; 9{,}8)$; в) $(-0{,}8; 4) \cup (20; +\infty)$; г) $(-\infty; -0{,}3] \cup [5; 17]$. **389.** а) $(-17; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -11) \cup \left(\frac{2}{3}; 11\right)$; в) $(-\infty; -5) \cup (0; 5)$; г) $(-0{,}1; 0) \cup (0{,}1; +\infty)$; д) $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$; е) $(-6; 0) \cup (6; 15)$. **390.** а) $(-2; 6)$; б) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup (1; 24)$; г) $(-\infty; -7) \cup (21; +\infty)$. **391.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{11}\right) \cup (4; +\infty)$. **392.** а) Нет; б) нет. **393.** а) $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$; б) $(-16; 11)$; в) $[-1; 3)$; г) $(-\infty; 4) \cup [6; +\infty)$; д) $(-1; 2]$; е) $(-\infty; -1{,}5) \cup [0{,}2; +\infty)$. **394.** а) $(-4; 18)$; б) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; г) $[-12{,}4; -8)$.

403. а) Пара прямых $x = 5$ и $y = -6$; б) пара прямых $x = -2$ и $x = 4$; в) точка (0; 1); г) окружность с центром в точке (5; −2) и радиусом 1. **404.** а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 = 25$; в) $x^2 + y^2 = 64$. **405.** а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$; б) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 169$; в) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 2$. **408.** При $m > 0$. **409.** а) При $r = 7$; б) при $r = 5$. **411.** а) (−2; −1), (−1; −2), (1; 2), (2; 1); б) (−2; −1), (−2; 1), (2; −1), (2; 1). **412.** а) [−0,24; 0]; б) $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$; г) (−2; 12); д) y — любое число. **413.** а) (5; 2); б) (−0,75; −4,25). **414.** а) (9; −7,5); б) (30; −25). **425.** При $b = 3$. **426.** При $a > 0$. **428.** 16 и 18 км/ч. **429.** а) (5; 2), (2; −1); б) (−4; −5), (6; 5); в) (1; −5), (4; −2); г) (4; 5), (13; −4). **430.** а) (10; −7), (−3; 6); б) (−1; 0), (−2; −1); в) (−3; 5), (2; 10); г) (2; 2), (1; 3). **431.** а) (2; −1), (1; −2); б) (1,5; 1), (1; 1,5); в) (−1; 0), (0; −1); г) $\left(5\frac{1}{4}; 3\frac{1}{4}\right)$. **432.** а) (10; −2), (−2; 10); б) (2; 1,2), (−1,2; −2); в) (3; −1); г) (−1; −2), (−2; −1). **433.** а) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$, (1; 4); б) $\left(2\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(2\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right)$; в) (−32; −18), (−10; 4); г) (−1; 2), $\left(1\frac{6}{7}; \frac{4}{7}\right)$; д) (8; 6), (−8; −6); е) (4; 0), (12; 16). **434.** а) (−3; −1), (5,5; 0,7); б) (3; −5), (5,5; 5); в) (−6; −9), (3; 4,5); г) (1,5; −2,5), (2,5; −1,5); д) (0; 2,5), (−2; 1,5); е) (−3; −1), $\left(1\frac{10}{11}; 1\frac{5}{11}\right)$. **435.** а) $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $u_1 = -3{,}5$, $v_1 = 2{,}5$; $u_2 = 3{,}5$, $v_2 = -2{,}5$. **436.** а) $x_1 = -5$, $y_1 = 4$; $x_2 = -2\frac{1}{3}$, $y_2 = 7\frac{1}{5}$; б) $p_1 = 6$, $t_1 = 2$; $p_2 = -5$, $t_2 = -1\frac{2}{3}$. **437.** а) (−14; −13), (12; 13); б) (−2; −13), (4; −7). **438.** а) (−2; −3), (2; 3); б) (2; 1), (2; 5), (3; 1), (3; 5). **439.** (−2; 0), (4; 6). **440.** а) (0; −4), (4; 0); б) (1; 2), $\left(-1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4}\right)$. **441.** а) (−3; −2), (3; 1); б) (3; −5), (5; −8). **442.** а) $x_1 = -2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 2$, $y_2 = -1$; б) $u_1 = -2$, $v_1 = 3$; $u_2 = -3$, $v_2 = 3{,}5$. **443.** а) (15; 10), (2; −3); б) (12; −6), (2; 4); в) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; $\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$; г) $\left(-1; -1\frac{1}{2}\right)$, (6; 2). **444.** а) $\left(2\frac{2}{3}; 1\frac{7}{9}\right)$, (6; 4); б) (−2; 0), (1,8; 11,4). **445.** (3; −1). **447.** а) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; -\sqrt{6})$; б) (−5; −4), (5; 4). **448.** а) (−4; −1), (−4; 1), (4; −1), (4; 1); б) (−6; −5), (−6; 5), (6; −5), (6; 5); в) (−7; −9), (8; 6). **449.** а) (0; 6); б) (−4; 0). **450.** При $k = 2$

и при $k = -2$. **451.** (5,4; 10,8). **453.** а) $\left(3\frac{1}{13}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

454. а) (−14; 12); б) $\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{3}\right)$; в) $(-\infty; -14) \cup (1{,}5; +\infty)$; г) (−25; 1,2).

455. 5 и 7. **456.** 3 и −4 или 4 и −3. **457.** 6 и 8 см. **458.** 24 и 10 см. **459.** 60 и 40 м. **460.** 210 см^2. **461.** 4,8 и 3,6 км/ч. **462.** 0,16 и 0,12 м/с. **463.** 6 и 5 см. **464.** 8 и 6 см. **465.** 5 и 12 см. **466.** 10 и 6 ч. **467.** 60 и 84 ч. **468.** 8 и 12 ч. **469.** 5000 р.; 8% годовых. **470.** 5 дм^2. **471.** 1 и 1,2 кг. **472.** 4 и 5 км/ч. **473.** 4 и 5 км/ч. **474.** 60 и 40 км/ч. **475.** 1,2 и 1,4 г/см^3. **476.** 40 см^3 олова и 60 см^3 меди. **477.** 200 г; 20%. **479.** а) (−1,5; 0,5); б) (−0,7; 4,1), (1,2; −1,6). **480.** а) (1; 1), (4; 7); б) (6; 8), (8; 6). **481.** а) (0; 6); б) $(-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$; в) [−2; 2]; г) $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$. **489.** а) Точка (3; 2); б) множество точек, принадлежащих параболе $y = (x-2)^2 + 1$, и точек, расположенных ниже ее. **490.** а) $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 9$; б) $x^2 + (y-4)^2 > 4$. **492.** а) Множеством решений является объединение первой и третьей четвертей координатной плоскости, включая оси координат; б) множеством решений является объединение второй и четвертой четвертей координатной плоскости, кроме осей координат. **494.** $\frac{x-1}{x+1}$. **495.** (1; 3), (0; −2). **499.** а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

501. а) Прямоугольный треугольник; 6,25 ед.^{2}; б) прямоугольник; 12 ед.^{2}. **502.** а) $\begin{cases} y \leqslant 1{,}5x + 3, \\ y \leqslant -1{,}5x + 3, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 25, \\ x^2 + y^2 \leqslant 100. \end{cases}$

503. $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -2. \end{cases}$ **504.** а) −7; −6; б) −4; 12. **505.** [5; 15]. **507.** а) (−4; −2), (4; 2), $(1{,}5\sqrt{6}; -0{,}5\sqrt{6})$, $(-1{,}5\sqrt{6}; 0{,}5\sqrt{6})$; б) (−3; −1), (3; 1), (1; 3). **508.** а) (−2; −2), (2; 2), $\left(\frac{1+2\sqrt{39}}{5}; \frac{2-\sqrt{39}}{5}\right)$, $\left(\frac{1-2\sqrt{39}}{5}; \frac{2+\sqrt{39}}{5}\right)$; б) (−5; −1), (5; 1). **509.** а) (−2; −3), (2; 3); б) (0; 0), (−1; 0,4). **510.** а) (0; 0), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{15}\right)$, (1,5; 0,75); б) (−9; 3), $\left(-\frac{1+\sqrt{61}}{5}; -\frac{1+\sqrt{61}}{10}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{5}; \frac{-1+\sqrt{61}}{10}\right)$. **511.** а) (−4; −3), (4; 3); б) (−2; 5), (2; −5), (−5; −2), (5; 2). **512.** а) (−2; −1), (2; 1); б) (−1,75; 2,25), (1,75; −2,25). **513.** а) (−3; −4), (−4; −3), (3; 4), (4; 3); б) (5; 1), (1; 5). **514.** а) (1; 2), (2; 1); б) (−2; −3), (−3; −2), $(2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7})$, $(2+\sqrt{7}; 2-\sqrt{7})$. **515.** а) (4; −1), (−4; 1), (0,5; −8), (−0,5; 8); б) (2; −1), (−2; 1), $\left(\frac{2}{3}; -3\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; 3\right)$.

518. а) $x^2 - y^2 = 25$; б) $y^4 + x^2y^2 - 9x^2 - 13y^2 + 36 = 0$; в) $x^3y + xy^3 - xy - 6x^2 - 6y^2 + 6 = 0$. **521.** а) При $a = -2$ и при $a = 6$; б) при $a = 7$; в) при $a = -2$; г) при $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и при $a = 1 + 2\sqrt{3}$. **522.** а) (−3; −2), (−3; 2), (3; −2), (3; 2); б) (−3; −1), (−3; 1), (3; −1), (3; 1). **526.** а) При $m = -\sqrt{10}$ и при $m = \sqrt{10}$; б) при $-\sqrt{10} < m < \sqrt{10}$. **527.** а) (5; −2), $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$; б) (0; −1), (3; 5); в) (6; −1), (3; 5); г) (6; 2), (11; 7); д) (4; 1); е) (−1,25; 0,75), (−5; −3). **528.** а) (4; 0), (0; −4); б) (2; 3), (−2; −1); в) (0; −5), (5,5; 6); г) (5; −4), (−0,5; 1,5). **529.** а) (−6; 2), (6; −2), (−2; 6), (2; −6); б) (−10; −8), (−10; 8), (10; −8), (10; 8). **530.** а) (0; −5), (1; −4); б) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$. **531.** а) (−3; −4); б) решений нет. **532.** а) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, (1; 1); б) $(7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; в) (3; 4), (3; −4), (0; 5); г) $(\sqrt{51}; -1)$, $(-\sqrt{51}; -1)$. **533.** а) (1,5; −2), (10; 15); б) (70; −28), (4; 5); в) (6; 8), (8; 6); г) (0,8; −1,2), (6; 4). **536.** а) (−4; −3), (−4; 2), (3; −3), (3; 2); б) $(3 - 3\sqrt{2}; 3 + 3\sqrt{2})$, $(3 + 3\sqrt{2}; 3 - 3\sqrt{2})$, (2; 4), (4; 2); в) (2; 3), (3; 2); г) (−3; −2), (−1; −4), (4; 5), (6; 3). **537.** $a = -2$, $b = 2$ или $a = -\frac{2}{3}$, $b = 6$. **538.** 18 и 12. **539.** 60 и 20 или 25 и 37,5. **540.** 10 и 0 или 26 и 24. **541.** 36. **542.** $\frac{2}{3}$ или $\frac{6}{19}$. **543.** $\frac{5}{4}$. **544.** 9 и 12 см. **545.** 6 ч. **546.** 12 и 8 ч. **547.** 40 и 50 км/ч. **548.** 40 и 50 км/ч. **549.** 6 и 4 км/ч. **553.** а) Круг с центром в точке (2; 4) и радиусом $\sqrt{20}$; б) множество точек координатной плоскости, расположенных выше параболы $y = -(x-3)^2 + 5$. **555.** а) Объединение двух прямых углов, образованных прямыми $x = 1$ и $y = 1$ и содержащих точки (2; 2) и (0; 0). **559.** а) Объединение двух областей A и B, где A — верхняя полуплоскость ($y \geqslant 0$), из которой исключен полукруг ($x^2 + y^2 \leqslant 1$), B — полукруг, расположенный ниже оси x.

Глава IV

566. а) 65; б) 230; в) 5150. **567.** $a_1 = -20$, $a_2 = -18$, $a_3 = -14$, $a_4 = -8$. **571.** $x = 3$, $y = 6$. **572.** а) $\pm\sqrt{1,5}$; б) $\pm\sqrt{4,5}$. **573.** а) [−7; 6]; б) $(-11; -4) \cup (1; +\infty)$. **578.** а) 4; б) 3. **581.** 28 м. **582.** 60 км/ч. **583.** 7,5 и 15 см. **584.** а) 12; б) 100. **585.** а) 3; б) −3,5. **586.** а) 1,5; б) 0,8. **589.** а) $c_1 = 21$, $d = 1,5$; б) $c_1 = 38$, $d = -2$. **590.** $x_1 = -100$, $d = 6,2$. **591.** а) Да;

б) нет. **592.** а) Нет; б) да. **593.** а) Для первых тридцати членов; б) для всех членов, начиная с тридцать первого. **594.** a_{14} — первый положительный член, $a_{14} = 0{,}5$. **599.** (2; −4), (−0,5; 3,5). **600.** а) 0; −8; 4; б) 10. **602.** а) 5; б) 10 000; в) $\frac{1}{32}$; г) 3. **605.** а) 63; б) 86,4. **606.** б) $S_{50} = 2700$, $S_{100} = 10\ 400$, $S_n = (n + 4)n$. **607.** 670. **608.** а) $n(n + 1)$; б) n^2. **609.** а) 11 325; б) 7070; в) 11 400; г) 1197. **610.** 1192. **611.** 275. **612.** 55. **613.** 199,5. **614.** 125 м. **616.** 15 рядов; 465 шаров. **617.** 10. **618.** 12. **619.** $a_1 = 0{,}8$, $d = 1{,}2$. **620.** а) Нет; б) да. **621.** а) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -1\right)$, $\left(1; \frac{2}{3}\right)$, $\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$; б) (2; 5), (2; −5), (−2; 5), (−2; −5). **625.** а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{10}{27}$; в) −32; г) $-\frac{1}{25}$. **626.** а) $\frac{4}{27}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **629.** $\frac{3}{1024}$ см^2. **630.** а) $\frac{1}{31}$; б) $\frac{56}{125}$. **631.** а) 3 или −3; б) 0,4 или −0,4. **632.** а) 1000; б) $\frac{1}{3}$ или $-\frac{1}{3}$. **633.** а) $\frac{1}{25}$ или $-\frac{1}{25}$; б) −162; в) −0,001 или 0,001. **635.** $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. **636.** 96. **643.** 3, 7, 11 или 12, 7, 2. **644.** 2, 5, 8. **645.** (5,5; −0,5). **646.** а) $(-\infty; -2] \cup [8{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (2{,}5; +\infty)$; в) $(-2{,}5; 4]$. **649.** б) $147\frac{7}{9}$; в) −63. **650.** а) −39 364; б) 171. **653.** а) 205,9; б) $25\frac{34}{81}$. **654.** а) $134\frac{4}{9}$; б) −274,5. **655.** −364. **656.** 2186. **657.** 5. **659.** а) $3\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{5}$. **660.** а) $(-\infty; 0] \cup [1{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **673.** а) $a_1 = -34$, $a_2 = -26{,}5$, $a_5 = -4$; б) $a_1 = -10{,}5$, $a_3 = -6{,}5$, $a_5 = -2{,}5$, $a_6 = -0{,}5$. **677.** а) $20 - 2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3} - 7$. **678.** а) 15; б) 15. **679.** а) Да; б) да. **680.** а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{6}$. **683.** а) −0,1; б) 0. **684.** а) $10\frac{5}{12}$; б) $55\sqrt{3}$. **685.** а) 5000; б) −780. **687.** а) $a_1 = 6{,}8$, $S_n = 55{,}2$; б) $n = 20$, $a_n = 60$; в) $a_1 = 0{,}5$, $n = 100$ или $a_1 = 0$, $n = 101$; г) $d = -1$, $n = 30$. **688.** $x_1 = -3{,}5$, $d = 0{,}5$. **692.** а) 11; б) 3. **693.** −75. **694.** а) $x^{\frac{n - n^2}{2}}$; б) $x^{\frac{n^2 + n}{2}}$. **695.** а) 46,2; б) −45,5. **696.** 1600. **697.** а) 840; б) −51,6. **699.** Да; $x_5 = 1$. **700.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **705.** а) $\frac{1}{18}$; б) $12\sqrt{6}$. **710.** а) $x_1 = 27$, $x_n = \frac{1}{3}$; б) $q = 2$, $n = 4$; в) $n = 6$, $x_n = -\frac{1}{64}$; г) $x_1 = 2\sqrt{3}$, $n = 5$. **711.** $q = 5$, $x_1 = 3$. **712.** 176.

Глава V

715. 10 вариантов. **716.** 12 способов. **721.** 36 партий. **722.** 132 игры. **723.** 28 рукопожатий. **724.** 552 фотографии. **725.** Хватит. **726.** 12 способами. **727.** 30 способами. **728.** 180 костюмов. **729.** а) 1; б) −1.

730. а) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right]$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right)$. **732.** 24 способами. **733.** 5040 маршрутов. **734.** 362 880 способами. **735.** 119 выражений. **736.** 6 вариантов. **737.** а) 720; б) 600. **738.** а) 6; б) 6. **739.** 384. **740.** а) 12; б) 18. **741.** а) 720; б) 120; в) 1440. **742.** 240 способами. **743.** 6 перестановок. **744.** 4 838 400 способами. **745.** 3 628 800 способами; 14 400 способами. **748.** а) 15; б) $\frac{1}{90}$; в) 1722; г) 40; д) 31,5; е) 330. **749.** а) 1320; б) 182; в) 15; г) 630; д) $\frac{1}{32}$; е) 5. **750.** а) Первое произведение больше в 5 раз. **751.** а) $\frac{4a-12}{5}$; б) $-ab$. **752.** а) $(-\infty; -0{,}4)$; б) $[3; 8]$. **754.** 24 способами. **755.** 870 способами. **756.** 840 способами. **757.** 11 880 способами. **758.** 30 240 способами. **759.** 27 907 200 способами. **760.** а) 30 способами; б) 360 способами; в) 720 способами. **761.** 7 893 600 способами. **762.** а) 120; б) 96. **763.** 544 320 номеров. **764.** а) 24; б) 12. **765.** а) $(-2{,}25; 2{,}75)$; б) $[-1{,}4; -0{,}6]$. **766.** а) $x = 1$, $y = 4$; б) $x = 1{,}5$, $y = 1$. **767.** а) 28; б) 220; в) $\frac{5}{8}$. **768.** 21 способом. **769.** 56 способами. **770.** 210 способами. **771.** 28 прямых. **772.** а) 210 способами; б) 252 способами. **773.** а) 55 способами; б) 165 способами. **774.** 4950 способами. **775.** 720 способами. **776.** а) 120; б) 24. **777.** 2880 способами. Указание. $P_5 \cdot P_4$. **778.** а) 10 способами; б) 120 способами; в) 45 способами. **779.** а) 1820 способами; б) 43 680 способами. **780.** 14 400 способами. Указание. $A_5^2 \cdot A_{10}^3$. **781.** 28 учащихся. **782.** 15 туристов. **784.** а) $(-2; 2{,}5)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **785.** а) $x_1 = -15$, $y_1 = -16$; $x_2 = 16$, $y_2 = 15$; б) $x_1 = 4$, $y_1 = -7$; $x_2 = 8$, $y_2 = 1$. **786.** а) 0,04; б) 229. **787.** 0,012. **788.** $\frac{23}{31}$. **794.** Нельзя. **795.** ≈ 77. **796.** а) $(-\infty; +\infty)$; $[-42; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$. **797.** а) $(-\infty; 0) \cup (0{,}8; +\infty)$; б) $\left[-\frac{5}{9}; 0\right]$; в) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right) \cup (2{,}5; +\infty)$. **798.** 0,08. **799.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$. **800.** $\frac{1}{15}$. **801.** $\frac{28}{31}$. **802.** $\frac{1}{18}$. **803.** У Андрея. **804.** $\frac{1}{6}$. **805.** $\frac{1}{120}$. **806.** $\frac{1}{24}$. **808.** $0 < p(A) < 1$, $0 < p(B) < 1$, $0 < p(C) < 1$, $p(D) = 0$. **809.** 0,8. **810.** $\frac{77}{195} \approx 0{,}39$. Указание. $\frac{C_{15}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{27}^4}$. **811.** $\frac{14}{33}$. **812.** $\frac{8}{33}$. **813.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{3}$. **814.** $\frac{1}{9}$. **815.** $\frac{1}{5}$. **816.** 0,4. **817.** b. **818.** Пересекаются в точках $(0; 0)$ и $(8; 80)$. **819.** а) -8; 7; б) 8. **820.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{15}$; в) $\frac{3}{5}$. **821.** а) 0,012; б) 0,008; в) 0,02. **822.** $\frac{1}{12}$. **823.** $\frac{1}{6}$. **824.** 0,0012. **825.** $\frac{1}{30}$. **826.** а) $\frac{25}{64}$; б) $\frac{9}{64}$. **827.** $\frac{1}{8}$. **828.** 0,95. **829.** $\frac{5}{6}$.

830. $\frac{26}{33}$. Указание. Подсчитать вероятность того, что данное событие не произойдет. **831.** 900 чисел. **834.** 12 чисел. **835.** а) 6 чисел; б) 12 чисел. **837.** а) $n = 5$; б) $n = 10$; в) $n = 15$. **838.** а) 24 числа. Указание. $2 \cdot A_4^2$; б) 24 числа. Указание. $4 \cdot P_3$. **840.** а) $n = 6$; б) $n = 5$. **841.** а) 276 способами; б) 552 способами. **842.** 63 варианта. Указание. $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$. **843.** 6 команд. **844.** а) 3024 способами; б) 504 способами. **845.** 8 точек. **846.** 7 866 000 способов. Указание. $C_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{18}^1$. **847.** 9 туристов. **848.** а) 495 способами; б) 792 способами. **849.** 560 способами. **850.** а) 1 число; б) 3 числа; в) 10 чисел. **851.** а) 14 чисел; б) 16 чисел. **852.** а) 5,8; б) 8; в) $\frac{1}{6}$. **853.** 6. **854.** $n = 7$ или $n = 8$. **855.** а) 10; б) 11; в) 19; г) 31. **856.** а) $0{,}4 > 0{,}2$; б) $0{,}4 > 0{,}1$. **857.** а) $\frac{1}{7}$. **858.** а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{4}$. **859.** а) $\frac{9}{25}$; б) $\frac{16}{25}$. **860.** 0,81. **861.** $\frac{1}{3}$. **862.** $\frac{1}{2}$. **863.** $\frac{1}{18}$. **864.** $\frac{37}{40}$. **865.** а) $\frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{120}$; в) $\frac{1}{120}$. **866.** а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{5}$. **867.** 2. **868.** $\frac{5}{8}$. **869.** 0,26. **870.** $\frac{1}{8}$. **871.** 0,00001. **872.** а) $\frac{1}{216}$; б) $\frac{1}{72}$; в) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{5}{72}$. **873.** Шансы одинаковы. **874.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{27}$.

Упражнения для повторения курса 7—9 классов

875. а) -10; б) $\frac{5}{6}$; в) -34; г) $-1\frac{2}{3}$. **877.** а) 7800 р.; б) снизилась на 22%. **878.** 16%. **879.** а) 30%; б) 20%. **880.** 12,5%. **881.** а) 8820 р.; б) 10 920 р. **882.** а) $10\sqrt{2}$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; в) 3; г) 14. **883.** $73 - 36\sqrt{6}$. **886.** а) -2; б) 1. **887.** а) $48\frac{10}{27}$; б) $-262\frac{5}{8}$. **888.** 46. **889.** 18. **890.** -32. **891.** $42\frac{5}{8}$. **892.** а) 380; б) $\frac{1}{720}$; в) 50; г) 252; д) 220. **893.** а) $\frac{3!}{6!} < 10^{-2}$; б) $\frac{15!}{10!} > 10^5$. **894.** а) 120; б) 96. **895.** 24. **896.** а) 495; б) 11 880. **897.** 3360. **898.** $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$. **899.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $\frac{5}{9}$. **900.** $\frac{1}{120}$. **901.** а) $\frac{1}{14}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{2}{7}$. **903.** а) 2; б) 15,1; в) -2; г) $-1{,}5$. **908.** ж) $\frac{a}{a+6}$; з) $\frac{2x-3}{2x+2}$; и) $\frac{m-1}{m+2}$. **909.** а) 4; б) $\frac{1}{3}$. **910.** а) $-\frac{1}{x}$; б) $\frac{10}{9-y^2}$; в) $\frac{1}{a-2}$; г) $\frac{5}{4b^2-6b+9}$. **911.** а) $\frac{4b^3-16b^2}{a}$; б) $\frac{3x}{2xy-4y^2}$; в) $\frac{p-5}{2p}$; г) $\frac{2n-3m}{m^2-2mn+4n^2}$. **912.** а) $\frac{x-7}{6}$; б) $-\frac{y^3+4y^2}{2}$; в) $\frac{b}{4a}$; г) $65c - 65$. **913.** а) $\frac{10-2m}{m-3}$; б) $\frac{a^2-3a+9}{a^2-5a+6}$; в) $\frac{2}{x+2}$;

г) 2. **914.** а) $\frac{1}{1+3m}$; б) $\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}$; в) $\frac{1}{a}$; г) $\frac{a^2-3a-12}{a^2+3a+2}$; д) 1; е) $\frac{3}{9x^2+3x+1}$. **915.** а) 30; б) 4,25. **917.** а) $2x^2y^3$; б) $\frac{8a}{b^2}$; в) $\frac{4x^{16}}{9y^{18}}$; г) $\frac{a^2c^3}{100b^{10}}$. **918.** а) 9; б) $33\frac{1}{3}$; в) 15; г) 2,5. **921.** а) $2\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{2a}-2$; в) $4\sqrt{xy}$; г) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$. **922.** в) $\sqrt{a}-1$; г) $\frac{1}{\sqrt{b}+1}$; д) $\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{y}}$; е) $\frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{cd}+d}$. **925.** а) −4,5; б) x — любое число; в) −1; г) корней нет. **926.** 6,4 км. **927.** 360 км. **928.** 4 и 12 км/ч. **929.** 9, 6, 16 и 15. **930.** 450 г. **933.** а) $m \leqslant 2{,}5$; б) $m \geqslant -2$; в) при любом m; г) $m \leqslant -4$ или $m \geqslant 4$. **934.** а) $k < -\frac{16}{15}$; б) $k > \frac{3}{8}$; в) $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$; г) таких значений k нет. **935.** а) 0; −3; б) $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; 7; г) $1\frac{5}{8}$; 3; д) $-18\frac{1}{7}$; −1; е) $-\frac{26}{35}$; 2. **936.** 110 м. **937.** 25. **938.** 14. **939.** 240 м. **940.** а) −1; в) −1; 3; г) −14; 1; д) 1; 2; е) −5; ж) $-1\frac{1}{3}$; з) −1; $\frac{1}{5}$. **941.** 15 и 10 ч. **942.** 60 и 80 км/ч. **943.** 15 км/ч. **944.** 2 км/ч. **945.** 20 км/ч. **946.** 10 деталей. **947.** 25 страниц. **948.** 70 км/ч. **949.** 12 км/ч. **951.** а) $\pm\frac{1}{2}$; ±2; б) $\pm\frac{2}{3}$; в) $\pm\sqrt{5}$; г) ±1. **952.** а) −0,6; 0,3; б) 0; −1. **953.** а) 0; ±4; б) 0; ±1; в) 0; г) 0; 2,5; д) −8; 0; 2; е) −3; 0; 2; ж) −1; ±3; з) $\frac{1}{2}$. **954.** а) 2; б) −0,1; в) 0,3; г) $\pm2\sqrt{3}$; д) −1; е) $\pm\sqrt{2}$. **957.** а) (4; −1); б) (2,45; 0,37); в) (15; 25); г) (0,32; −0,86). **958.** а) (1; 2); б) (13; 8). **960.** а) 5; б) 3; в) $\sqrt{34}$. **963.** а) $5x + y = 30$; б) $7x + 4y = 26$. **966.** 60 и 40 деталей. **967.** 80 и 50 км/ч. **968.** 48 и 65 ц/га. **969.** 60 и 20 км/ч. **970.** В отношении 2 : 3. **971.** В отношении 3 : 1. **973.** а) (−2; −4), (4; 8); б) (5; 3); в) (1; 4), (4; 1); г) (3; −1), (−3; 1); д) (0; 4), $\left(2\frac{3}{4}; 13\frac{5}{8}\right)$; е) (1; 2), $\left(\frac{1}{8}; -1\frac{1}{2}\right)$. **974.** а) (1; 5), (5; 1); б) (3; −2), $\left(-2\frac{1}{3}; 14\right)$; в) (−3; −5), (−5; −3), (3; 5), (5; 3); г) (−4; −2), (4; 2). **976.** При $c = -8$. **977.** Пересекаются в точке (1; 4). **978.** При $a = \frac{1}{3}$. **979.** $\frac{6}{4}$. **980.** $\frac{3}{5}$. **981.** 9 и 40 см. **982.** 11 и 8 см. **983.** 15 и 30 дней. **984.** 3 и 6 дней. **986.** $a_1 = 10$, $d = 10$. **987.** −2. **989.** 7,2. **990.** −25. **991.** 80. **992.** а) $\frac{1}{128}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ или $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **993.** $\frac{2}{27}$. **994.** 31,5. **995.** 16,5. **996.** 635. **997.** 18; 12; 8. **998.** $4\frac{4}{9}$. **1001.** а) $m > -4$; б) $x > -1{,}2$; в) $a \leqslant 16$; г) $b \geqslant 4$; д) $x < 0{,}1$; е) $m > -4$; ж) $y \leqslant 10$; з) $a \leqslant -0{,}5$.

1002. а) $x < 3$; б) $a > -1,5$; в) $y \geqslant 0,16$; г) $m \geqslant 5\frac{1}{3}$; д) $a > 11$; е) $y < -0,4$. **1003.** а) При $b > -62$; б) при $b < -0,76$. **1004.** а) $(-\infty;\ 2,5)$; б) $\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; в) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{7}\right)$; г) $(-\infty;\ -0,8)$. **1005.** а) $(1;\ 3)$; б) решений нет; в) $\left(-\infty;\ \frac{1}{8}\right)$; г) решений нет. **1006.** а) $(-3;\ 0)$; б) решений нет. **1007.** а) $(-5,5;\ 1)$; б) $(4;\ +\infty)$; в) $(-29;\ 3)$; г) решений нет. **1008.** а) -3; -2; -1; 0; б) 2; 3; 4; 5; 6; 7. **1009.** а) $(-3;\ 6)$; б) $[-27;\ -7]$; в) $[6;\ 8)$; г) $[-0,56;\ 1,2]$. **1010.** а) При $0 \leqslant x \leqslant 5$; б) при $-17 \leqslant x \leqslant 13$. **1011.** а) $(-5;\ 3)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right] \cup [2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -3] \cup \cup \left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; г) $(-1;\ 1,5)$; д) $[-0,5;\ 0,5]$; е) $(-\infty;\ -1,2) \cup (0;\ +\infty)$; ж) $(-\infty;\ -0,2) \cup (0,2;\ +\infty)$; з) $(-\infty;\ 0) \cup (0,8;\ +\infty)$. **1012.** а) $(-\infty;\ -1) \cup \cup (4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$; в) $(-13;\ -1)$; г) $(-4;\ 7)$. **1014.** а) $[-1;\ 2,5]$; б) $(-\infty;\ 2] \cup [3;\ 4,5]$; в) 3; г) $[0;\ +\infty)$. **1015.** а) 1; 2; 3; 5; 6; б) 2; 3; 4. **1016.** а) При $x \geqslant \frac{1}{3}$; б) при $x \leqslant 5$; в) при $-3 \leqslant x \leqslant 5$; г) при $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 1,5$; д) при $0,5 \leqslant x \leqslant 2,4$; е) при $x \geqslant 5\frac{2}{3}$. **1017.** а) x — любое число; $x \neq 2,5$; $x \geqslant 2,5$; б) x — любое число; $x \neq -4$ и $x \neq 0,5$; $x < -4$ и $x > 0,5$; в) x — любое число; x — любое число, x — любое число. **1029.** а) Убывает в промежутке $(-\infty;\ -2,5]$ и возрастает в промежутке $[-2,5;\ +\infty)$; б) возрастает в промежутке $\left(-\infty;\ \frac{1}{6}\right]$ и убывает в промежутке $\left[\frac{1}{6};\ +\infty\right)$; в) убывает в промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right]$ и возрастает в промежутке $\left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; г) возрастает в промежутке $(-\infty;\ 0,3]$ и убывает в промежутке $[0,3;\ +\infty)$. **1032.** а) $(2;\ -7)$; б) $(2;\ -16)$, $(8;\ -34)$; в) $(-1;\ -7)$, $(1;\ -5)$; г) $(-3;\ 33)$. **1033.** а) $y = -2x - 4$; б) $y = -2x + 4$; в) $y = 2x + 4$.

Задачи повышенной трудности

1036. -2; -1; $-0,5$; 1; 2. **1039.** При $a = 1$. **1042.** $(2;\ 0)$, $(4;\ 0)$. **1043.** При $a = 3$; $(1,5;\ -5,25)$. **1045.** При $m < -\frac{1}{3}$. **1046.** $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$. **1047.** $\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{4}$ или $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. **1048.** $a = 1,5$ или $a = -2,5$. **1049.** При $m \in (-1;\ 3)$. **1050.** При $a < 1$. **1051.** $(13;\ -15)$, $(6;\ -1)$.

1052. а) $(-7; -10)$, $(10; 7)$; б) $(2; 3)$, $(3; 2)$. **1053.** $(0; 0)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(-3; -2)$, $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$, $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$, $(-\sqrt{19}; \sqrt{19})$, $(\sqrt{19}; -\sqrt{19})$. **1054.** $(1+\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$. **1055.** $-\sqrt{\sqrt{10}-3}-4$, $\sqrt{\sqrt{10}-3}-4$. Указание. Выполните подстановку $y = x + 4$. **1056.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **1057.** $(1; 8)$, $(8; 1)$. **1058.** $(128; 2)$, $(2; 128)$. **1059.** $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{15}$ или $\frac{5}{24}$. **1060.** $(1; 2; 3)$, $(-3; -4; -5)$. **1061.** $m = 23$. **1063.** 50 ч, 75 ч и 60 ч. **1064.** Существует; 22. **1065.** $C_n = (2n-1)^2$. **1066.** $2 \leqslant n \leqslant 20$. **1067.** $\frac{n}{2n+1}$. **1073.** $-1, -1, -1; -1, 2, -4; -4, 2, -1; -3, 3, -3$. **1074.** 1, 4, 7. **1076.** а) 2; б) 1. **1078.** $x = -\sqrt{3}$, $y = 4$. **1079.** $x_1 = 8$, $y_1 = -8$, $z_1 = 8$; $x_2 = -8$, $y_2 = 8$, $z_2 = 8$. **1080.** $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $z_1 = 2$; $x_2 = 7$, $y_2 = 3$, $z_2 = 4$; $x_3 = 7$, $y_3 = 4$, $z_3 = 3$; $x_4 = 5$, $y_4 = 2$, $z_4 = 7$. **1082.** $\frac{2}{3}$. **1084.** 1029. **1085.** 150 и 810. **1086.** 54 и 6; 98 и 2. **1089.** 0; 63. **1092.** Прав Олег, так как $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. **1093.** $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. **1094.** $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = 0$. **1095.** $0{,}9 \cdot \frac{89}{99} \approx 0{,}809$. **1096.** $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{144}$. **1097.** 0,54.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Суворова Светлана Борисовна

АЛГЕБРА

9 КЛАСС

Учебник для
общеобразовательных учреждений

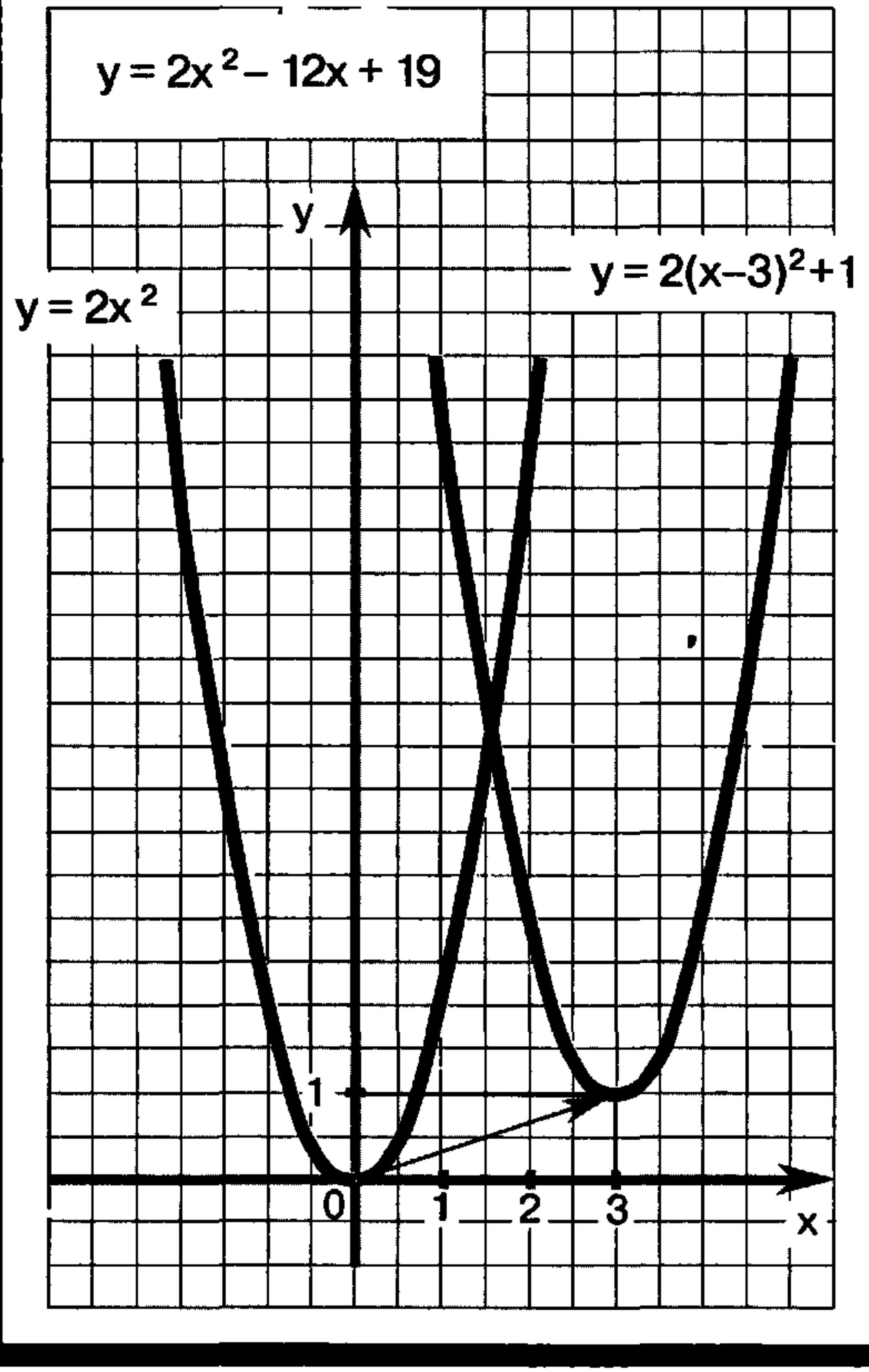
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, С. В. Дубова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *К. В. Солоненко, О. Ю. Тупикиной*
Компьютерная верстка
и техническое редактирование *Н. О. Рычковой, О. С. Ивановой, Т. А. Зеленской*
Корректоры *Н. В. Бурдина, И. Н. Панкова, А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 25.08.09. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 15,69+0,48 форз. Доп. тираж 40 000 экз. Заказ № 23537 (п-гз).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ГРАФИК КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ



АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \text{ при } q \neq 1$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \text{ при } q \neq 1$$

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } k \leqslant n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ где } k \leqslant n$$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

$b_n = b_1 q^{n-1}$

$a_n = a_1 \times d(n-1)$

ISBN 978-5-09-021134-5

9 785090 211345

ПРОСВЕЩЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО